Zadání 4. série

Termín odeslání: 21. listopadu 2016

Adresa:
Korespondenční seminář iKS
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech republic

Úloha N4. Mirek si myslí 2016 celých čísel. Rado chce tato čísla zjistit, proto mu položí několik otázek. Každá otázka má tvar polynomu v 2016 proměnných s celočíselnými koeficienty. Mirek do tohoto polynomu svoje čísla v nějakém pořadí dosadí a oznámí Radovi hodnotu, která vyjde. Dokažte, že Radovi stačí jedna otázka, aby zjistil všechna čísla, na která Mirek myslel.

Úloha G4. V rovině leží vně sebe kružnice k_1 a k_2. Jejich společné vnitřní tečny (myšlené jako úsečky s koncovými body na k_1 a k_2) nazvěme s_1 a s_2. Bod X leží na spojnici středů s_1 a s_2. Tečny z X ke k_1, resp. ke k_2, se jí dotýkají v A a B, resp. v C a D, kde body jsou označeny tak, že úsečky AC a BD se kříží. Ukažte, že AC, BD, s_1 a s_2 procházejí všechny jedním bodem.

Úloha A4. Pro kladná reálná a, b, c dokažte nerovnost

$$\frac{2a}{\sqrt{3a+b}} + \frac{2b}{\sqrt{3b+c}} + \frac{2c}{\sqrt{3c+a}} \leq \sqrt{3(a+b+c)}.$$

Úloha C4. Venca a Kuba našli krabičku s $n > 2$ sirkami a rozhodli se, že si zahrají hru. Na začátku Kuba z krabičky odebere několik sirek (alespoň jednu, ale ne všechny). Poté se střídají v tazích a v každém tahu musí hráč odebrat několik sirek z krabičky, přičemž vždy musí odebrat alespoň jednu sirku a maximálně dvakrát tolik sirek, kolik bylo z krabičky odebráno v předchozím tahu. Vyhraje ten, kdo odebere poslední sirku. Pro jaká n vyhraje Venca (za předpokladu, že oba hrají optimálně)?