Řešení 5. série

Úloha A5. *Najděte všechny funkce $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$, že pro všechna $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ platí*

$$(x - y)^2 \leq |f(x) - f(y)| \leq |x - y|.$$

Řešení. Volbou $x = 0$, $y = 1$ získáme $1 \leq |f(0) - f(1)| \leq 1$, čili $|f(0) - f(1)| = 1$. Dále z voleb $y = 0$ a $y = 1$ získáme $|f(0) - f(x)| \leq |x| = x$ a $|f(x) - f(1)| \leq |x - 1| = 1 - x$.

Z trojúhelníkové nerovnosti máme $1 = |f(0) - f(1)| = |(f(0) - f(x)) + (f(x) - f(1))| \leq |f(0) - f(x)| + |f(x) - f(1)| \leq x + (1 - x) = 1$. Všude musí tedy nastávat rovnosti, takže speciálně $|f(0) - f(x)| = x$. Tedy pro každé x je $f(x) = f(0) \pm x$. Kdyby pro nějaká $x \neq 0 \neq y$ bylo $f(x) = f(0) + x$ a $f(y) = f(0) - y$, pak $x + y = |x + y| = |f(0) + x - (f(0) - y)| = |f(x) - f(y)| \leq |x - y| < \max\{x, y\} < x + y$, což je spor.

Tedy jediné možné vyhovující funkce jsou $f(x) = c + x$ a $f(x) = c - x$ pro $c \in \mathbb{R}$. Zkouškou ověříme, že vyhovují:

Když $f(x) = c \pm x$ a $f(y) = c \pm y$ se stejným znaménkem, pak $|f(x) - f(y)| = |x - y|$. Pravá nerovnost je zjevně splněna (dokonce s rovností), levá plyne z toho, že pro $x, y \in \langle 0, 1\rangle$ je $|x - y| \in \langle 0, 1\rangle$.

Poznámky opravujícího. Lidi, dělejte zkoušku. Nebo alespoň řekněte, že je jasná. Ale zmiňte ji. Jinak se za to strhávají body.

Jinak, většina řešení si BÚNO f posunula o konstantu a případně otočila tak, aby $f(0) = 0$ a $f(1) = 1$, a pak pracovala s tím. Ale šlo to i bez toho, jak ukazuje vzorák.

Pár lidí zkoušelo použít vysokoškolskou analýzu. Těm, co se odvolávali na spojitost, to prošlo. Těm, co se odvolávali na derivace, to neprošlo, protože nikde neřekli, že uvažovaná funkce derivovat jde. *(Rado Švarc)*

Úloha G5. *V trojúhelníku ABC jsou body D, E a F paty výšek z vrcholů A, B a C. K stranám AB a BC připíšeme zvenku podobné pravoúhlé trojúhelníky ABK a CBL s pravým úhlem u vrcholu K, respektive L. Střed AF označíme M a střed CD jako N. Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům DEF, EKL a BMN leží na jedné přímce.*

Řešení.

Pokud trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AC, pak tvrzení je triviální díky symetrii podle osy úsečky AC. Na této ose leží všechna zmíněná opsiště. Předpokládejme tedy, že BÚNO $|AB| > |CB|$.

Nechť S, X, Y postupně značí středy úseček AC, AB a BC. Ukážeme, že všechny zmíněné kružnice procházejí body E, S, tedy sdílejí jednu společnou tětivu a jejich opsiště leží na ose úsečky ES.

Pro DEF je to jednoduché, protože jedná se o Feuerbachovu kružnici trojúhelníka ABC, která prochází všemi středy stran.

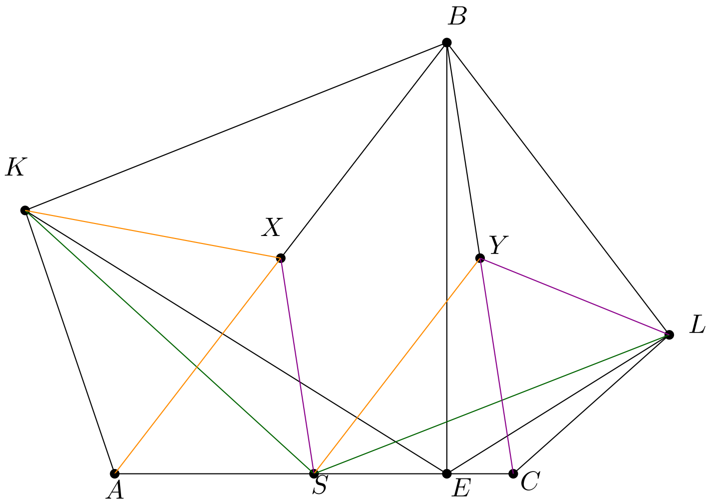
V trojúhelníku ACF je MS střední příčkou, tedy $MS \parallel FC$, z čehož plyne $\angle EMB = 90°$. Analogicky platí též $\angle ENB = 90°$. Na Thaletově kružnici nad úsečkou BE leží tedy tři body M, N, S.

U trojúhelníka EKL máme více způsobů, jak postupovat.

První řešení (podobné trojúhelníky): Ukážeme, že S je antišvrk. Označme úhly v trojúhelníku ABC standardně pomocí α, β, γ a úhel $\angle ABK = \angle CBL = \delta$. Všimneme si, že X, Y jsou středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABK, resp. CBL. Tedy platí

$$|SX| = |BC|/2 = |YC| = |YL|,$$

$$|SY| = |BA|/2 = |XA| = |XK|.$$



Dále díky vztahu středového a obvodového úhlu platí, že

$$\angle SXK = \angle AXK + \angle AXS = 2\delta + \beta.$$

Totéž platí i pro $\angle SYL$, a proto $\angle SXK = \angle SYL$ a trojúhelníky SXK, SLY jsou shodné podle *sus*, tudíž $|SK| = |SL|$. Dále jsou čtyřúhelníky $BECL$ a $BEAK$ díky pravým úhlům tětivové, a proto

$$\angle BEK = \angle BAK = \angle BCL = \angle BEL.$$

Neboli BE je osou úhlu KEL, z čehož plyne, že SE je vnější osou a máme vyhráno.

Druhé řešení (Spirální podobnost podle Radka Olšáka): Nechť P, Q jsou body takové, že K, L jsou postupně středy úseček BP, resp. BQ. Rovnoramenné trojúhelníky PBA a BQC jsou přímo shodné, a proto existuje spirální podobnost, která převádí trojúhelník PBA na BQC. Uvažujme, že tato spirální podobnost nechá body P, B, A klouzat po úsečkách k příslušným bodům B, Q, C. V polovině tohoto procesu dostaneme trojúhelník KLS, a proto $\angle KSL = \angle PAB = \angle KEL$, což znamená, že $KSEL$ je tětivový.

Třetí řešení (Six-feet theorem podle Matěje Doležálka): Nechť Z je průsečík AK s CL. Uvažujme kamaráda T k bodu B v trojúhelníku ACZ, pak podle Six-feet theorem platí, že šest pat kolmic dvou bodů B, T na strany trojúhelníka ACZ leží na jedné kružnici. Paty kolmic z B jsou K, L, E. Ukážeme, že pata kolmice z T na AC je právě S, protože

$$\angle TAC = \angle BAK = \angle BCL = \angle TCA.$$

Poznámky opravujícího. Nejtěžší část úlohy byla dokázat, že S leží na kružnici opsané trojúhelníka EKL, za kterou jsem udělil pět bodů. Pochválil bych řešitele, kteří nezapomněli na speciální případ rovnoramenného trojúhelníku, protože při splynutí bodů E, S by některé argumenty nemusely fungovat.

(Anh Dung „Tonda" Le)

Úloha C5. *Existuje nekonečný systém $\mathcal{S}$ podmnožin přirozených čísel takový, že průnik libovolných 2018 množin $S_1, S_2, \ldots, S_{2018} \in \mathcal{S}$ je neprázdný, zatímco průnik libovolných 2019 různých množin $S_1, S_2, \ldots, S_{2019} \in \mathcal{S}$ je prázdný?*

Řešení. Ano, systém s požadovanou vlastností existuje! Ukážeme si hned tři způsoby, jak ho zkonstruovat:

První řešení (trik s prvočísly): Nejprve si seřadíme všechna prvočísla do rostoucí posloupnosti, tj. $p_1 = 2, p_2 = 3\ldots$ Potom můžeme vzít nekonečný systém $S_1, S_2, \ldots,$ přičemž i-tá množina obsahuje všechny násobky p_i, které mají právě 2018 prvočíselných dělitelů. Tento systém vyhovuje zadání, neboť průnik libovolných 2018 množin $S_{a_1}, \ldots, S_{a_{2018}}$ obsahuje číslo $p_{a_1} p_{a_2} \ldots p_{a_{2018}}$, tudíž je neprázdný, naopak každé přirozené číslo je zřejmě obsaženo v nejvýše 2018 množinách, takže průnik 2019 různých množin musí být prázdný.

Druhé řešení (trik s binárkou): Každé přirozené číslo si můžeme napsat ve dvojkové soustavě, pak můžeme zvolit S_i jako čísla, která mají ciferný součet 2018 a mají jedničku na i-té pozici (to je ta, která odpovídá 2^{i-1}). Tento systém pak vyhovuje z podobných důvodů, jako ten v prvním řešení.

Třetí řešení (TeMno): Uvažme množinu M, obsahující všechny 2018prvkové podmnožiny přirozených čísel. M je nekonečná podmnožina $\mathbb{N}^{2018}$, což je, jak známo, spočetná množina, takže M je nekonečně spočetná. To znamená, že si její prvky můžeme očíslovat přirozenými čísly jako $M_1, M_2, \ldots$ (každý prvek M se v této posloupnosti vyskytne právě jednou). Teď stačí zvolit $S_i = \{j \in \mathbb{N} : i \in M_j\}$. Každé číslo se vyskytne v právě 2018 množinách systému, takže průnik libovolných 2019 musí být prázdný. Naopak pokud $\{a_1, \ldots, a_{2018}\} = M_k$, vyskytuje se k všech množinách S_{a_i}, takže mají neprázdný průnik a daný systém vyhovuje.

Poznámky opravujícího. Všechna řešení, která použila některý ze dvou výše uvedených triků, ze bez větších problémů dostala k cíli. Většina z vás se však pokusila o přímočařejší postup, založený na popárování 2018tic přirozených čísel s přirozenými čísly. Tam už se vyskytla řada problémů. Někteří zapomněli dokázat (nebo alespoň zmínit), že množina všech 2018tic je spočetná, přestože je to nutná podmínka k tomu, aby dané párování existovalo. Jiní se pokusili systém sestrojit induktivně, přičemž se skoro všichni dopustili nějaké chyby, například při prohlášení, že existence libovolně velkého konečného systému vynucuje existenci nekonečně velkého. Takové argumenty bohužel obecně nefungují, protože třeba bez problémů najdeme libovolně dlouhou konečnou klesající posloupnost přirozených čísel, ale nekonečná přesto neexistuje. Jiní využili nekonečného procesu, aniž by dokázali, že limitně povede k nějakému výsledku. V běžné kombinatorické úloze by se nejspíš jednalo pouze o zanedbatelné nedostatky, práce s nekonečnými objekty ovšem většinou vyžaduje mnohem větší opatrnost. Pro získání lepší představy doporučuji přečíst seriál PraSete od Mirka Olšáka o teorii množin, dostupný například zde: *https://mks.mff.cuni.cz/archive/35/serial.pdf.*

(Danil Koževnikov)

Úloha N5. *Nechť k je sudé přirozené číslo. Pavel si nejdříve vybere přirozené číslo N_0 větší než 1, napíše ho na tabuli a každou minutu opakuje následující krok: vezme si nějakého prvočíselného dělitele p čísla N zrovna napsaného na tabuli, smaže původní N a místo něj napíše $N \cdot (p^k - p^{-1})$. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho sudých přirozených čísel k takových, že číslo na tabuli bude v nějaké chvíli dělitelné 2018 bez ohledu na to, co Pavel dělá.*

Řešení. Dokážeme, že $k = 1009^m - 1$ vyhovuje pro každé m, čímž najdeme hledaných nekonečně mnoho sudých čísel.

Definujme $S(x)$ jako součin prvočíselných dělitelů x, které nejsou kongruentní s 1 modulo 1009 (i s násobností). Taková funkce je zřejmě multiplikativní. Ukážeme, že pokud upravené N nebude dělitelné 2018, pak se hodnota $S(N)$ sníží. To bude spor, neboť $S(N)$ se jako přirozené číslo nemůže snižovat do nekonečna. Upravené N budeme dále značit N'.

Nejprve předpokládáme, že $p \equiv 1 \pmod{1009}$. Potom se N změní na $\frac{N}{p} \cdot (p^{1009^m} - 1)$. Z volby p dostáváme $(p^{1009^m} - 1) \equiv (1^{1009^m} - 1) \equiv 0 \pmod{1009}$. Proto je $p^{1009^m} - 1$ dělitelné 1009. Stejně tak je zřejmě p liché, z čehož $2 \mid p^{1009^m} - 1$. Protože ani 2, ani 1009 nedělí p, je jimi dělitelné i celé N'. To znamená, že v tomto případě už bude číslo dělitelné 2018.

Nyní uvažujme $p \not\equiv 1 \pmod{1009}$. Rozložíme si druhou závorku na

$$N' = \frac{N}{p} \cdot (p^{1009^m} - 1) = \frac{N}{p} \cdot (p-1) \cdot (p^{1009^m - 1} + p^{1009^m - 2} + \cdots + 1).$$

Uvažujme libovolné prvočíslo q, které dělí druhou závorku. Potom q dělí i $p^{1009^m} - 1$. To znamená, že $ord_q(p) \mid 1009^m$.

Nejprve vyřešíme případ, že $ord_q(p) = 1$. Tedy platí, že $p \equiv 1 \pmod{q}$. Protože q dělí druhou závorku, dostáváme

$$0 \equiv (p^{1009^m - 1} + p^{1009^m - 2} + \cdots + 1) \equiv (1^{1009^m - 1} + 1^{1009^m - 2} + \cdots + 1) \equiv 1009^m \pmod{q}.$$

Z toho snadno vyplývá, že $q = 1009$ a vybrané p je proto kongruentní s jedničkou modulo 1009, což jsme již vyřešili.

To už znamená, že pro každé prvočíslo q, které dělí druhou závorku, platí $1009 \mid ord_q(p)$. Zároveň z Malé Fermatovy věty dostáváme $ord_q(p) \mid (q-1)$. Dohromady proto $1009 \mid (q-1)$.

Pokud se vrátíme zpátky k definici $S(N)$, znamená to, že prvočíslo q nepřispěje k hodnotě $S(N')$. K hodnotě $S(N')$ proto přispěje pouze výraz $N \cdot \frac{(p-1)}{p}$. Avšak prvočíslo p jsme volili tak, aby $S(p) = p$. Potom s využitím multiplikativity funkce S odhadneme

$$S(N') = S(N) \cdot \frac{S(p-1)}{S(p)} \leq S(N) \cdot \frac{p-1}{p} < S(N).$$

To znamená, že hodnota $S(N)$ v každém kroku klesá, čímž máme hotovo. *(Pavel Hudec)*