Riešenie 2. série

Úloha A2. *Nech $P(x)$ je polynóm stupňa n s reálnymi koeficientami a vedúcim koeficientom rovným 1. Ukážte, že vieme nájsť dva polynómy $Q(x)$ a $R(x)$, ktoré sú oba stupňa n, majú všetky korene reálne a ich vedúci koeficient je rovný 1, také, že $P(x) = Q(x)/2 + R(x)/2$.*

Riešenie. Máme dokázať, že vieme nájsť také dva polynómy. Preto sa pokúsime ich skonštruovať.

Lemma. *Pre každú množinu n usporiadaných reálnych dvojíc (x_i, y_i), kde $x_i \neq x_j$, pre $i \neq j$, existuje polynóm $Q(x)$ stupňa n s reálnymi koeficientmi a vedúcim koeficientom 1, taký, že $Q(x_i) = y_i$.*

Dôkaz. Tento existenčný dôkaz urobíme konštrukciou takého polynómu.

Najprv zostrojíme polynóm $Q'(x)$, ktorý bude prechádzať danými bodmi (x_i, y_i) a bude mať stupeň $n-1$. Tento polynóm dostaneme ako súčet n polynómov $Q_j(x)$, pričom

- $Q_j(x_j) = y_j$
- $Q_j(x_i) = 0$ pre $i \neq j$.

Potom

$$Q'(x_i) = \sum_{j=1}^{n} Q_j(x_i) = y_i.$$

Čiastkové polynómy Q_j majú jasne daných $n-1$ koreňov. Aby navyše prechádzali bodom (x_j, y_j), predelíme ich vhodnou konštantou a dostaneme

$$Q_j(x) = y_1 \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}{(x_j-x_1)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_n)}.$$

Potom $Q(x)$ dostaneme tak, že ku $Q'(x)$ pripočítame polynóm stupňa n s vedúcim koeficientom 1 a koreňmi $x_1, \ldots, x_n$ (lebo taký nezmení hodnoty v bodoch $x_1, \ldots, x_i$ a pridá člen x^n). Teda

$$Q(x) = Q'(x) + (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Zrejme $Q(x)$ má reálne koeficienty, vedúci koeficient 1 a spĺňa $Q(x_i) = y_i$. Výsledný polynóm tohoto typu sa volá *Langrangeov interpolačný polynóm.* □

Nech je daný polynóm $P(x)$ zo zadania. To, aby $P(x) = Q(x)/2 + R(x)/2$, nebude problém (zostrojíme $Q(x)$ a potom $R(x)$ bude $2P(x) - Q(x)$). Potrebujeme však zaručiť, že oba budú n-tého stupňa a budú mať všetky korene reálne. To, že budú mať oba stupeň n, už vieme dosiahnúť tak, že $Q(x)$ zostrojíme podľa lemy. Zaručiť, aby mali aj n reálnych koreňov, nám pomôže nasledujúce tvrdenie.

Tvrdenie. *Ak pre $x_1 < x_2$ majú $Q(x_1)$ a $Q(x_2)$ rôzne znamienka, potom medzi x_1 a x_2 má polynóm $Q(x)$ reálny koreň.*

Totiž ak je graf $Q(x)$ niekde nad a inde pod x-ovou osou, tak medzi tými dvoma bodmi ju musel pretať (lebo $Q(x)$ je na tom intervale spojitá funkcia).

Teraz chceme zostrojiť vhodné $Q(x)$. Urobíme to pomocou lemy, čiže nám stačí určiť jeho n bodov. Potrebujeme, aby mal n reálnych koreňov, tak budeme tieto body dávať striedavo nad a pod x-ovú os. Aby to platilo aj pre $R(x) = 2P(x) - Q(x)$, musíme ich zároveň dávať striedavo nad a pod $2P(x)$. Keď $Q(a)$ bude kladné a zároveň väčšie ako $2P(a)$, tak potom $R(a)$ bude záporné. Podobne ak $Q(b)$ bude záporné a zároveň menšie ako $2P(b)$, tak potom $R(b)$ bude kladné. Takto dosiahneme, že $Q(x)$ a $R(x)$ budú mať aspoň $n-1$ reálnych koreňov. Avšak všetky polynómy majú párny počet komplexných koreňov, preto posledný koreň $Q(x)$ aj $R(x)$ nemôže byť sám komplexný a teda všetkých n koreňov je reálnych.

Takže pre nejakú rastúcu postupnosť $\{x_i\}_{i=1}^n$ vyberieme postupnosť $\{y_i\}_{i=1}^n$ tak, aby

- pre párne i bolo $y_i = \max\{2P(x_i), 0\} + 1$
- pre nepárne i bolo $y_i = \min\{2P(x_i), 0\} - 1$,

kde $\max\{a, b\}$ (resp. $\min\{a, b\}$) označujú maximum (resp. minimum) z danej dvojice a, b. Potom $Q(x)$ zostrojíme podľa lemy tak aby $Q(x_i) = y_i$. Určíme $R(x) = 2P(x) - Q(x)$.

Zrejme takto zvolené $Q(x)$ a $R(x)$ spĺňajú aj vzťah $P(x) = Q(x)/2 + R(x)/2$. Navyše oba majú vedúci koeficient 1, stupeň n, reálne koeficienty, všetky korene reálne. Totiž pre všetky i, $0 < i < n$, majú $Q(x_i)$ (resp. $R(x_i)$) a $Q(x_{i+1})$ (resp. $R(x_{i+1})$) rôzne znamienka. Preto medzi každými x_i a x_{i+1} je aspoň jeden koreň. Teda majú aspoň $n - 1$ reálnych koreňov. Lenže oba majú reálne koeficienty, čiže musia mať párny počet komplexných koreňov. Preto budú mať n reálnych koreňov. *(Matúš Stehlík)*

Úloha C2. *Každému bodu v dvojrozmernej rovine je priradené reálne číslo tak, že pre každý trojuholník je číslo v strede jeho vpísanej kružnice rovné aritmetickému priemeru čísel v jeho vrcholoch. Dokážte, že každý bod v rovine má priradené rovnaké číslo.*

Riešenie. V príkladoch tohto typu je ideálne prísť k rovnostiam hodnôt v nejakých dvojiciach alebo trojiciach bodov. Potom sa tieto dvojice alebo trojice správnym spôsobom pootáčajú alebo poposúvajú a z toho vypadne, že ľubovoľné dva body majú nutne rovnakú hodnotu. Presne takto budeme postupovať.

Uvažujme rovnoramenný lichobežník $ABCD$ s rovnobežnými stranami AD a BC. Navyše predpokladáme, že $ABCD$ nie je zároveň obdĺžnikom. Potom existuje priesečník priamok AB a CD, ktorý si označíme P. Hodnoty v bodoch budeme označovať malými písmenami. Trojuholníky ACP a BDP majú zrejme rovnaký stred vpísanej kružnice I a preto

$$\frac{p + a + c}{3} = i = \frac{p + b + d}{3},$$

odkiaľ dostávame $a + c = b + d$.

Náš plán nám hovorí, že potrebujeme správnym otáčaním tento vzťah využiť. Počet prstov na ruke je päť a preto si zoberme pravidelný päťuholník $A_1A_2A_3A_4A_5$. Aplikovaním predošlého vzťahu na rovnoramenné lichobežníky $A_1A_3A_4A_5$ a $A_2A_3A_4A_5$ jednoducho dostávame $a_1+a_4 = a_3 + a_5$ a $a_2 + a_4 = a_3 + a_5$. Z predošlého zrejme vyplýva $a_1 = a_2$.

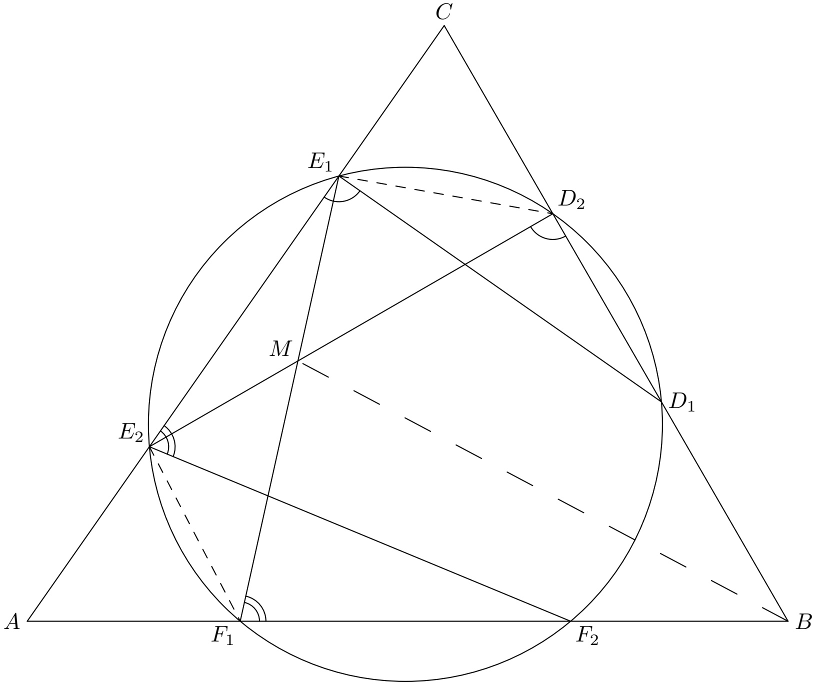
Aby sme náš dôkaz skompletizovali, tak pre každú dvojicu bodov vieme spätne skonštruovať túto situáciu, a preto sa hodnota každých dvoch bodov musí rovnať.

Poznámky opravujúceho. Všetky správne riešenia popisovali rôzne geometrické situácie, ktoré nakoniec viedli k rovnosti hodnôt ľubovoľných dvoch bodov. Niektoré nesprávne riešenia predpokladali existenciu bodu s najvyššiou hodnotou zo všetkých. Nanešťastie pre riešiteľa, bodov je v dvojrozmernej rovine nekonečne veľa, a preto nie vždy je možné vybrať bod s najvyššou hodnotou. Stačí si napríklad predstaviť bežnú číselnú os. *(Peter „Petržlen“ Csiba)*

Úloha G2. *Kružnica pretína dvakrát každú zo strán BC, CA, AB trojuholníka ABC postupne v bodoch (D_1, D_2), (E_1, E_2) a (F_1, F_2). Priamky D_1E_1 a D_2F_2 sa pretínajú v bode L, E_1F_1 a E_2D_2 sa pretínajú v bode M, F_1D_1 a F_2E_2 sa pretínajú v bode N. Dokážte, že priamky AL, BM a CN sa pretínajú v jednom bode.*

Riešenie (podľa Martina Vodičku). Máme dokázať, že tri priamky sa pretínajú v jednom bode. Jednou z účinných zbraní je Cèvova veta. Navyše máme k dizpozícii kružnicu, ktorá nám dodáva množstvo uhlov, a preto ako schodná cesta sa javí napasovať na úlohu Cèvovu vetu v goniometrickom tvare[1].

[1] Tá hovorí nasledujúce: ak sú body X, Y, Z po rade vnútorné body strán BC, AC, AB trojuholníka ABC, tak priamky AX, BY, CZ prechádzajú jedným bodom práve vtedy, keď $\frac{\sin|\sphericalangle ACZ|\cdot\sin|\sphericalangle BAX|\cdot\sin|\sphericalangle CBY|}{\sin|\sphericalangle BCZ|\cdot\sin|\sphericalangle CAX|\cdot\sin|\sphericalangle ABY|} = 1$



Najprv zistíme, čo vieme povedať o sínusoch skúmaných uhlov. Zo sínusovej vety pre $\triangle BMF_1$ platí

$$\sin|\sphericalangle ABM| = \sin|\sphericalangle F_1BM| = |F_1M| \cdot \frac{\sin|\sphericalangle BF_1M|}{|BM|}.$$

Analogicky pre $\triangle BMD_2$ platí

$$\sin|\sphericalangle CBM| = \sin|\sphericalangle D_2BM| = |D_2M| \cdot \frac{\sin|\sphericalangle BD_2M|}{|BM|}.$$

Podľa vety (uu) $\triangle ME_2F_1 \sim \triangle ME_1D_2$, teda

$$\frac{|F_1M|}{|D_2M|} = \frac{|E_2F_1|}{|E_1D_2|}.$$

Po spojení predchádzajúcich rovností obdržíme

$$\frac{\sin|\sphericalangle ABM|}{\sin|\sphericalangle CBM|} = \frac{|E_2F_1|}{|E_1D_2|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle BF_1M|}{\sin|\sphericalangle BD_2M|}.$$

Úplne tak isto dostaneme

$$\frac{\sin|\sphericalangle BCN|}{\sin|\sphericalangle ACN|} = \frac{|F_2D_1|}{|F_1E_2|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle CD_1N|}{\sin|\sphericalangle CE_2N|}$$

aj

$$\frac{\sin|\sphericalangle CAL|}{\sin|\sphericalangle BAL|} = \frac{|D_2E_1|}{|D_1F_2|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle AE_1L|}{\sin|\sphericalangle AF_2L|}.$$

V tomto okamihu už máme všetko prichystané, aby sme využili Cèvovu vetu

$$\frac{\sin|\sphericalangle ABM|\cdot\sin|\sphericalangle BCN|\cdot\sin|\sphericalangle CAL|}{\sin|\sphericalangle CBM|\cdot\sin|\sphericalangle ACN|\cdot\sin|\sphericalangle BAL|}=$$
$$=\frac{|E_2F_1|}{|E_1D_2|}\cdot\frac{\sin|\sphericalangle BF_1M|}{\sin|\sphericalangle BD_2M|}\cdot\frac{|F_2D_1|}{|F_1E_2|}\cdot\frac{\sin|\sphericalangle CD_1N|}{\sin|\sphericalangle CE_2N|}\cdot\frac{|D_2E_1|}{|D_1F_2|}\cdot\frac{\sin|\sphericalangle AE_1L|}{\sin|\sphericalangle AF_2L|}=1.$$

V poslednom kroku sme využili rovnosti obvodových uhlov na kružnici. Keďže súčin vyšiel 1, priamky AL, BM a CN sa naozaj pretínajú v jednom bode. *(Filip Sládek)*

Úloha N2. *Prirodzené číslo n je* rozložiteľné, *ak existuje 2012 prirodzených čísel a_i s nasledujúcimi vlastnosťami:*

(i) $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012}$,
(ii) $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{2012}$,
(iii) $a_i \mid a_{i+1}$ *pre* $i = 1, 2, \ldots, 2011$.

Dokážte, že až na konečný počet je každé prirodzené číslo rozložiteľné.

Riešenie (podľa Le Anh Dunga). Číslo n nazvime m-rozložiteľné, ak existuje m čísel, ktoré spĺňajú analogické podmienky ako v zadaní. Pozorovania:

- ak n je číslo, ktoré je m-rozložiteľné, tak číslo $l \cdot n$ je tiež m-rozložiteľné:
$$k = \sum_{i=1}^{m} a_i$$
$$k \cdot l = \sum_{i=1}^{m} l \cdot a_i$$
- číslo, ktoré sa dá zapísať v tvare p^{m-1}, je m-rozložiteľné:
$$p^{m-1} = 1 + (p-1) + p(p-1) + p^2(p-1) + \cdots + p^{m-2}(p-1)$$

Teraz dokážeme indukciou pomocné tvrdenie:

Tvrdenie. *Pre každé prirodzené m existuje iba konečne veľa prvočísel, ktoré nie sú m-rozložiteľné.*

Dôkaz. Množinu takých prvočísel označme M_m. Pre $m = 1$ tvrdenie platí triviálne. Predpokladajme, že platí pre nejaké $m = k-1$. Pozrime sa teraz na prvočísla q väčšie ako $2 \cdot \prod p_i^{k-2} + 1$, kde p_i sú prvočísla z množiny M_{k-1}. Ukážeme, že číslo $\frac{q-1}{2}$ je $(k-1)$-rozložiteľné.

Ak obsahuje $\frac{q-1}{2}$ prvočíslo, ktoré nie je v M_{k-1}, tak zrejme je $(k-1)$-rozložiteľné. Ak obsahuje iba prvočísla z M_{k-1}, tak musí obsahovať niektoré prvočíslo aspoň v mocnine $k-2$ (inak by q bolo menšie ako $2 \cdot \prod p_i^{k-2} + 1$). Číslo $\frac{q-1}{2}$ je teda rozložiteľné na nejaké $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$, ktoré vyhovujú zadaniu a q potom vieme rozložiť na $1, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{k-1} \Rightarrow q$ je k-rozložiteľné. M_k je teda konečná pre každé prirodzené k. □

O čísle n vieme povedať, že ak obsahuje nejaké prvočíslo p, ktoré je m-rozložiteľné, tak aj n je m-rozložiteľné. Ďalej, ak obsahuje niektoré prvočíslo v mocnine aspoň $m-1$, tak je takisto m rozložiteľné. Teda jediné čísla, ktoré nie sú m-rozložiteľné, sú iba tie, ktoré zároveň

- obsahujú iba provočísla z M_m
- obsahujú každé prvočíslo v mocnine najviac $m-2$

Tých je ale zrejme konečný počet. Riešenie našej úlohy dostaneme ako špeciálny prípad $m = 2012$.

Poznámky opravujúceho. Viacerým z vás bol udelený bod nad maximálny počet za všeobecný prístup k úlohe. *(Ondrej Kováč)*