Zadanie 2. série

Termín odoslania: 8. jún 2015

Adresa: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha N2. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky $m, n \in \mathbb{N}$ platí:

$$f(mn) = [m, n](f(m), f(n))$$

kde $[x, y]$, resp. (x, y) označuje najmenší spoločný násobok, resp. najväčší spoločný deliteľ x, y.

Úloha C2. Patrik sa hral so štvorcovými mriežkami, v ktorých bolo každé políčko biele alebo čierne. Uvedomil si, že niektoré sa mu zdajú krajšie ako iné a tiež, že niektoré sú zaujímavejšie ako iné. Mriežku $m \times n$ nazýva *peknou*, ak pre každé dva riadky platí, že najviac v jednom stĺpci majú oba čierne políčko. Ďalej mriežku nazýva *zaujímavou*, ak je pekná, no po zafarbení ľubovoľného bieleho štvorčeka načierno takou nebude. Aký najmenší počet čiernych políčok môže byť v zaujímavej mriežke ?

Úloha G2. Nech ABC je trojuholník so stredom vpísanej kružnice I. Nech D, E, F sú body dotyku vpísanej kružnice so stranami BC, AC, AB. Nech k, l sú kružnice vpísané do štvoruholníkov $BDIF$, $CEID$. Dokážte, že jedna zo spoločných dotyčníc kružníc k, l prechádza bodom A.

Úloha A2. Nech $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n, y_1 \geq y_2 \geq \ldots \geq y_n$, sú reálne čísla spĺňajúce

$$\sum_{i=1}^{n} ix_i = \sum_{i=1}^{n} iy_i$$

Dokážte, že pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i[i\alpha] \geq \sum_{i=1}^{n} y_i[i\alpha]$$

kde $[x]$ označuje najväčšie celé číslo neprevyšujúce x.