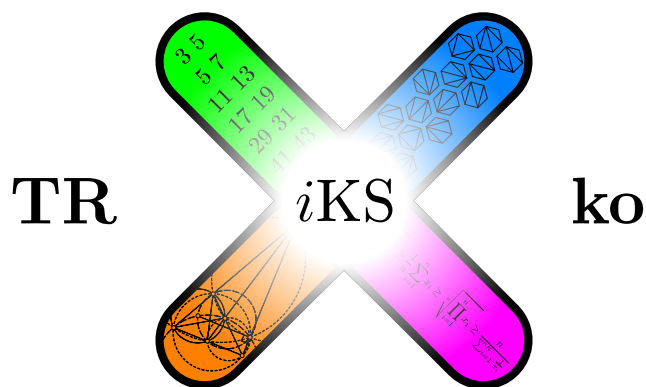




Úloha 1. Dokažte, že rovnice $x^2 + p|x| = qx - 1$ s reálnými parametry p, q má v oboru reálných čísel čtyři reálná řešení právě tehdy, když platí $p + |q| + 2 < 0$.

Úloha 2. Přirozená čísla a, b, c splňují $a < b < c < 2a$. Dokažte, že platí

$$(a, b) + (b, c) + (c, a) \leq a.$$

Pozn. (x, y) značí největší společný dělitel čísel x, y .

Úloha 3. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D, E, F po řadě paty výšek z vrcholů A, B, C a H průsečík výšek. Výška z B protíná úsečku DF v bodě P . Označme Q bod na přímce AB takový, že $PQ \perp BC$. Dokažte, že přímka EQ půlí úsečku AH .

Úloha 4. Nechť M je množina šesti různých přirozených čísel, jejichž součet je 60. Všechna tato čísla napíšeme na stěny krychle, jedno na každou stěnu. V jednom kroku vybereme libovolné tři stěny krychle, které mají společný vrchol, a každé číslo na těchto třech stěnách zvýšíme o 1. Určete počet všech takových množin M , jejichž čísla lze zapsat na stěny krychle výše popsáním způsobem tak, že po konečném počtu vhodných kroků budou na všech stěnách stejná čísla.