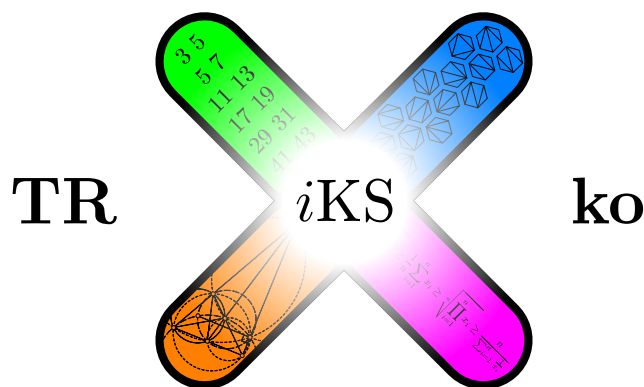




Úloha 1. *Nechť $ABCDE$ je konvexní pětiúhelník takový, že $|AB| = |BC| = |CD|$, $\angle EAB = \angle BCD$ a $\angle EDC = \angle CBA$. Dokažte, že kolmice z bodu E na BC a úsečky AC a BD prochází jedním bodem.*

Úloha 2. *Vodka hraje následující hru na řadku z 9 políček. Zpočátku jsou všechna políčka prázdná. V každém tahu smí Vodka provést přesně jednu z následujících dvou operací:*

- *Vybere libovolné číslo ve tvaru 2^j , kde j je nezáporné celé číslo, a vloží ho do nějakého prázdného políčka.*
- *Vybere dvě (ne nutně sousední) políčka se stejným číslem; toto číslo označme 2^j . Poté číslo v jednom z políček nahradí číslem 2^{j+1} a číslo v druhém políčku vymaže.*

Na konci hry je v jednom políčku 2^n , kde n je dané celé kladné číslo, zatímco ostatní políčka jsou prázdná. Určete vzhledem na n maximální počet tahů, který mohl Vodka provést.

Úloha 3. *Posloupnost reálných čísel $a_1, a_2, \dots$ splňuje vztah*

$$a_n = - \max_{i+j=n} (a_i + a_j) \quad \text{pro všechna } n > 2025.$$

Dokažte, že posloupnost je omezená, tj. existuje konstanta M taková, že $|a_n| \leq M$ pro všechna kladná celá čísla n .