Zadání 3. série

Termín odeslání: 8. října 2018

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha G3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník a P je bod takový, že $PA \perp AB$ a $PC \perp CB$. Body D a E leží na stranách AB a BC tak, že $|AD| = |AP|$ a $|CE| = |CP|$. Body X a Y leží na přímkách AB a BC tak, že $XE \perp BC$ a $YD \perp AB$. Ukažte, že $|PX| = |PY|$.

Úloha C3. Pavel našel 2018 reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ a strčil si je do pytlíčku. Nyní kdykoliv jsou v pytlíčku čísla x a y, umí Pavel vyrobit čísla $x + y$, $-x$ a x^{2018} a přidat je do pytlíčku. Ukažte, že existuje nenulové reálné číslo K, nezávislé na $a_1, a_2, \ldots, a_n$, takové, že Pavel umí v konečně mnoha krocích vyrobit číslo $Ka_1a_2 \cdots a_{2018}$ nezávisle na hodnotě čísel a_1, $a_2, \ldots, a_{2018}$.

Úloha A3. Ukažte, že pro každou n-tici reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$\frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_1^2 + x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1 + x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} < \sqrt{n}.$$

Úloha N3. Přirozená čísla jsou obarvena dvěma barvami. Funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je neklesající, a splňuje, že pokud (ne nutně různá) čísla x, y a z mají stejnou barvu a splňují $x + y = z$, potom platí $f(x) + f(y) = f(z)$. Ukažte, že existuje kladné číslo a takové, že $f(x) \leq ax$ pro všechna přirozená x.