Zadanie 3. série

Termín odoslania: 26. novembra 2012

Adresa: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha G3. V trojuholníku ABC body K, L ležia postupne na stranách AB, AC. Úsečky BL a CK sa pretínajú v bode P. Dokážte, že ak $|BC|^2 = |BK| \cdot |BA| + |CL| \cdot |CA|$, tak A, K, L, P ležia na jednej kružnici.

Úloha A3. Nájdite všetky funkcie $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spĺňajúce

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + y$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{Q}$.

Úloha C3. Majme $n \geq 3$ bodov ležiacich v rovine, pričom žiadne tri neležia na jednej priamke. Koľko je možností, ako vybrať $\binom{n-1}{2}$ trojuholníkov tak, aby každý z vybratých trojuholníkov obsahoval stranu, ktorá nie je stranou žiadneho iného z vybratých trojuholníkov (trojuholníky môžu mať vrcholy len z daných n bodov)?

Úloha N3. Pre nepárne prvočíslo p dokážte

$$1^{p-2} + 2^{p-2} + \cdots + \left(\frac{p-1}{2}\right)^{p-2} \equiv \frac{2-2^p}{p} \pmod{p}.$$