Zadání 6. série

Termín odeslání: 13. února 2017

Adresa: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech republic

Úloha C6. Kuba si z nudy napsal posloupnost n různých reálných čísel. Všiml si, že kdykoliv z této posloupnosti vyškrtá několik čísel tak, aby zbylá posloupnost byla klesající, potom tato nová posloupnost bude obsahovat nanejvýš k čísel. Ukažte, že umí čísla v původní posloupnosti obarvit nejvýše k barvami tak, aby čísla jedné barvy vždy tvořila rostoucí posloupnost.

Úloha N6. Nechť a a b jsou přirozená čísla a c celé číslo. Ukažte, že existuje přirozené x takové, že

$$b \mid a^x + x - c.$$

Úloha A6. Nechť $n > 2$ je přirozené číslo a x_1, x_2,. . . , x_n jsou kladná reálná čísla. Ukažte, že

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x_i^3 + x_{i-1}x_ix_{i+1}} \leq \sum_{cyc} \frac{1}{x_ix_{i+1}(x_i + x_{i+1})}.$$

Úloha G6. Nechť ABC je různostranný trojúhelník. Kružnice vepsaná $\triangle ABC$ se středem I se dotýká AC v bodě B_1. Přímka BI protíná AC v bodě B_2. Označme ω_B kružnici opsanou $\triangle BB_1B_2$. Analogicky zkonstruujme ω_A a ω_C. Ukažte, že potenční střed[1] ω_A, ω_B a ω_C leží na přímce OI, kde O je střed kružnice opsané $\triangle ABC$.

[1] Potenční bod tří kružnic je bod, který k nim všem má stejnou mocnost.