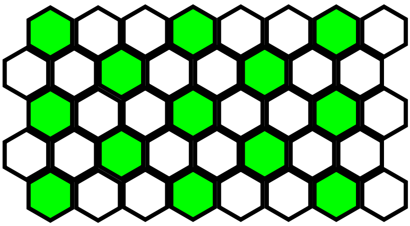
Riešenia 3. série

Úloha C3. *Maja a Vilko sa hrajú na nekonečnom plaste medu (rovine rozdelenej na šesťuholníky). Na začiatku sú všetky šesťuholníky prázdne. Maja vždy priletí a naplní dva susediace šesťuholníky medom, následne priletí Vilko a med z ľubovoľného šesťuholníka zje. Maja vyhrá, ak se jej podarí zaplniť k za sebou idúcich šesťuholníkov v jednom rade. Nájdite najväčšie k také, že Maja dokáže vyhrať nezávisle na tom, čo robí Vilko.*

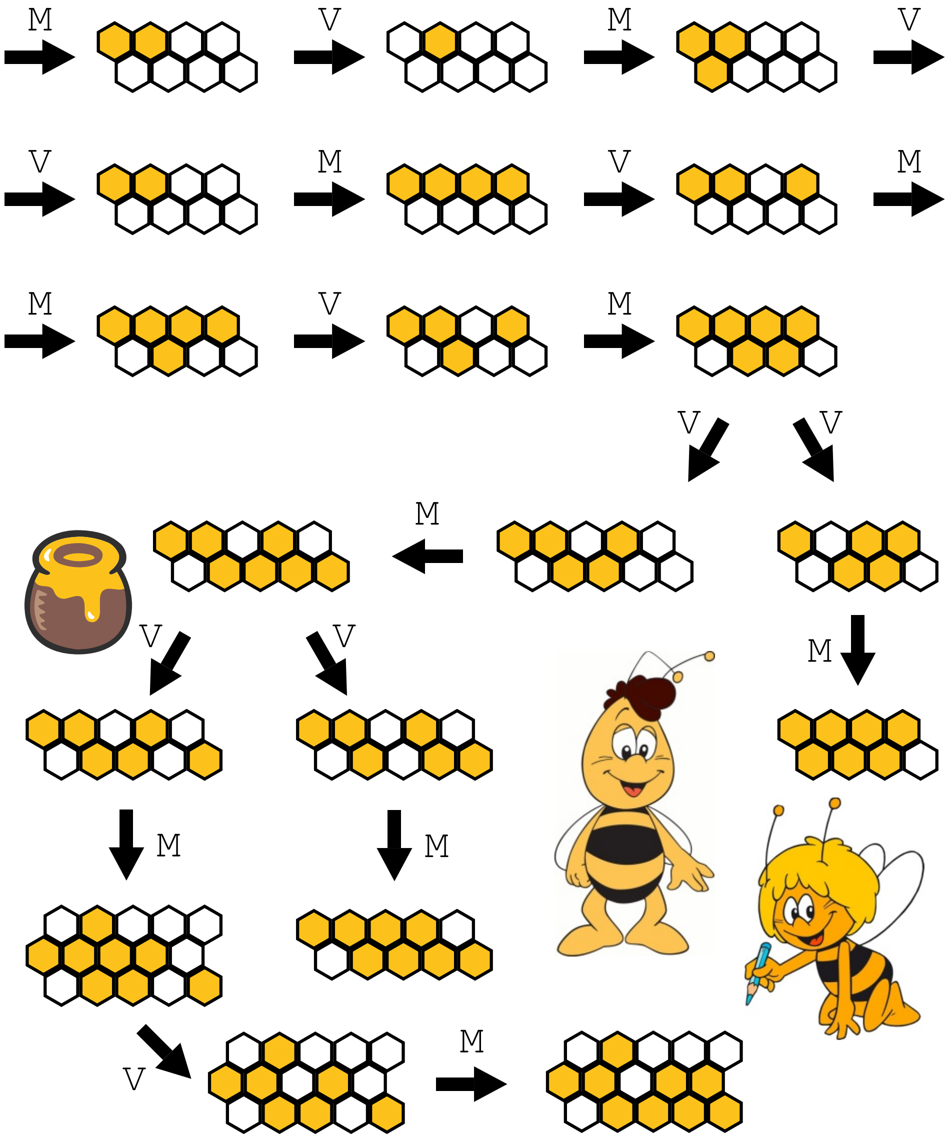
Riešenie. Dôkaz si rozdelíme na dve časti.

V prvej dokážeme, že $k < 6$. Šesťuholníkovú sieť si ofarbíme tak, ako na obrázku, tj. zelenou farbou zafarbíme v každom treťom riadku každé tretie políčko, pričom v riadkoch nad sebou budú zelené políčka zvolené tak, aby sa nedotýkali. Potom v každom riadku (nielen vo vodorovnom) budú vždy zafarbené políčka na vzdialenosť 3 od seba. To sa dá voľne odargumentovať tým, že ofarbenie je jednoznačne definované, pretože v každom riadku je iba jedno políčko, ktoré sa nedotýka ani jedného z tých, ktoré sú zafarbené v spodnejšom riadku. Takto zadefinované ofarbenie bude analogické pre ľubovoľnú dvojicu susedných riadkov, preto stačí povedať, že z obrázka je jasné, že dané ofarbenie funguje pre danú časť obrázka a pre celú rovinu bude fungovať, lebo relatívne pozície políčok sú analogické.



Vilkova stratégia je nasledovná: Akonáhle Majka zaplní nejaké z ofarbených políčok, Vilko med z tohto políčka zje. Ak Majka zaplní nejaké iné políčka, Vilko zje ľubovoľné z nich. Keďže zafarbené políčka sú v ľubovoľnom riadku na vzdialenosť 3 od seba, Majke sa nikdy nepodarí zaplniť viac ako jedno zafarbené políčko v jednom ťahu. To ale znamená, že počet zaplnených zafarbených políčok nikdy nepresiahne 1. Na to, aby mohla Majka zaplniť 6 a viac políčok v rade, by ale potrebovala mať zaplnené aspoň dve zafarbené políčka, čo evidentne nie je možné. Preto $k \leq 5$.

Pre $k = 5$ je potrebné uviesť vyhrávajúcu stratégiu pre Majku. Na obrázku môžete vidieť prehľadnú konštrukciu Majkinej stratégie. Hra prebieha na riadkoch, to však nemusí byť nutné, záleži to od toho, ako sa Vilko rozhodne zjesť políčko z trojuholníka. Ale konštrukcia je robená tak, aby sa dala bez ujmy na všeobecnosti previesť v ľubovoľnej dvojici riadkov (či už vodorovných, alebo diagonálnych). Takisto Vilkove ťahy sú robené bez ujmy na všeobecnosti, t.j. ak by mal mať Vilko dve možnosti, ako ťahať, potom tieto dve možnosti sú osovo symetrické podľa osi obrazca tvoreného zaplenenými štvorčekmi, poprípade je Vilkov ťah rozvetvený do dvoch možných ťahov. A samozrejme Vilko vždy ťahá tak, aby Majka hneď ďalším ťahom nevyhrala. Majkinym cieľom je dostať v oboch riadkoch naraz situáciu, že hneď pri ďalšom ťahu bude schopná z ľubovoľného z nich spraviť päticu. Tým pádom môže Vilko zabrániť tejto hrozbe iba na jednom z nich (pretože nemajú spoločné políčko), a teda do toho druhého Majka doplní potrebným spôsobom medy.


M
V
M
V
V
M
V
M
M
V
M
V
V
M
M
V
V
M
M
V
M

(Martin „Vodka“ Vodička, Peter „Pedro“ Súkeník)

Úloha A3. *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ také, že pre všetky dvojice reálnych čísel x, y platí:*

$$f(yf(x) - x) = f(x)f(y) + 2x.$$

Riešenie. Po dosadení $x = y = 0$ do zadania: $f(0) = f^2(0)$, teda $f(0) = 0$ alebo $f(0) = 1$. Rozoberieme oba prípady.

1. prípad: $f(0) = 0$

Dosadením $x = -x$, $y = 0$ dostávame

$$f(0f(-x) + x) = f(-x)f(0) - 2x$$
$$f(x) = -2x$$

Po dosadení $f(x) = -2x$ do zadania zistíme, že daná funkcia vyhovuje.

2. prípad: $f(0) = 1$

Dosadením $x = x$, $y = 0$ dostávame

$$f(0f(x) - x) = f(x)f(0) + 2x$$
$$f(-x) = f(x) + 2x \tag{1}$$

Ukážeme, že $f(1) = 0$. Sporom, nech $f(1) = c \neq 0$. Platí $f(-1) = f(1) + 2 = c + 2$. Dosadením $x = 1$, $y = \frac{1}{c}$:

$$f\left(\frac{f(1)}{c} - 1\right) = f(1)f\left(\frac{1}{c}\right) + 2$$
$$f(0) = cf\left(\frac{1}{c}\right) + 2$$
$$f\left(\frac{1}{c}\right) = -\frac{1}{c}$$

Dosadením $x = \frac{1}{c}$, $y = -1$:

$$f\left(-f\left(\frac{1}{c}\right) - \frac{1}{c}\right) = f\left(\frac{1}{c}\right)f(-1) + \frac{2}{c}$$
$$f(0) = -\frac{1}{c}(c+2) + \frac{2}{c} = -1$$

Nastal spor s $f(0) = 1$, teda $f(1) = 0$.

Dosadením $x = -1$ do (1) dostávame $f(-1) = f(1) + 2 = 2$. Po dosadení $x = x$, $y = -1$ do zadania dostávame

$$f(-f(x) - x) = f(x)f(-1) + 2x = 2f(x) + 2x$$

Podľa (1) platí:

$$f(-f(x) - x) = f(f(x) + x) + 2f(x) + 2x$$

Spojením vyššie uvedených rovností

$$f(f(x) + x) + 2f(x) + 2x = f(-f(x) - x)$$
$$f(f(x) + x) + 2f(x) + 2x = 2f(x) + 2x$$
$$f(f(x) + x) = 0$$

Ak ukážem, že existuje práve jeden koreň k funkcie f, tak potom bude musieť výraz $f(x)+x$ stále nadobúdať hodnotu k, teda $f(x) = k - x$

Nech $f(k) = 0$, platí $f(-k) = f(k) + 2k = 2k$. Dosadením $x = -k$, $y = -\frac{1}{2}$:

$$f\left(-\frac{f(-k)}{2} + k\right) = f(-k)f\left(-\frac{1}{2}\right) - 2k$$

$$f(0) = 2kf\left(-\frac{1}{2}\right) - 2k$$

Pravá strana rovnice je nenulová, nutne $k \neq 0$:

$$\frac{1}{2k} = f\left(-\frac{1}{2}\right) - 1$$

Keďže pravá strana rovnice je konštanta, aj koreň k je jednoznačne určený, čiže koreň k je jediný. Vieme, že $f(1) = 0$, teda 1 je jediný koreň funkcie.
Zároveň vieme, že funkcia musí spĺňať $f(x) = k - x = 1 - x$. Po dosadení $f(x) = 1 - x$ do zadania zistíme, že daná funkcia vyhovuje.

Vyhovujú funkcie $f(x) = 1 - x$ a $f(x) = -2x$. *(MiroSlavoMír(o))*

Úloha N3. *Uvažujme nekonštantnú aritmetickú postupnosť reálnych čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Predpokladajme, že existujú nesúdeliteľné prirodzené čísla $p, q > 1$ také, že a_1^2, a_{p+1}^2 a a_{q+1}^2 sú tiež členmi tejto aritmetickej postupnosti. Dokážte, že všetky členy tejto aritmetickej postupnosti sú celé čísla.*

Riešenie. Diferenciu našej postupnosti si označme d. Najprv ukážeme, že a_1 aj d sú racionálne, a teda aj celá postupnosť je racionálna.

Keďže a_1^2, a_{p+1}^2, a_{q+1}^2 sú v našej postupnosti, tak ich vieme zapísať ako:

$$a_1^2 = a_1 + xd, x \in \mathbb{N}_0 \quad a_{p+1}^2 = a_1 + yd, y \in \mathbb{N}_0 \quad a_{q+1}^2 = a_1 + zd, z \in \mathbb{N}_0$$

a_{p+1}^2 vieme zapísať aj inak, a to tak, že rozpíšeme a_{p+1} pomocou diferencie a následne umocníme. $a_{p+1}^2 = (a_1 + pd)^2 = a_1^2 + 2a_1pd + p^2d^2$, z čoho

$$a_{p+1}^2 - a_1^2 = 2a_1pd + p^2d^2 = a_1 + yd - (a_1 + xd) = d(y - x),$$

teda dostaneme $2a_1p + p^2d = y - x \in \mathbb{Z}$. Preto aj $2a_1pq + p^2qd \in \mathbb{Z}$ a podobne pre q dostaneme $2a_1pq + pq^2d \in \mathbb{Z}$. Po odčítaní týchto 2 celých čísel dostaneme $p^2qd - pq^2d = d(p^2q - pq^2) \in \mathbb{Z}$, z čoho už ale vidíme, že $d \in \mathbb{Q}$ a spojením s $2a_1pq + p^2qd \in \mathbb{Z}$ máme aj $a_1 \in \mathbb{Q}$.

Teraz vieme napísať a_1 a d ako zlomok : $a_1 = \frac{k}{m}$ a $d = \frac{l}{m}$, kde $nsd(k, l, m) = 1$. Pokiaľ $m = 1$ tak zadanie platí. Inak si zoberme nejaké prvočíslo r, ktoré delí m.

Najprv predpokladajme, že $r \nmid k$. Potom[1] $v_r(a_1^2) = v_r(\frac{k^2}{m^2}) = v_r(\frac{1}{m^2})$, pričom poslednú rovnosť máme vďaka nesúdeliteľnosti. Avšak si všimneme, že a_1 aj d majú v menovateli m, tak každý člen postupnosti sa dá zapísať ako $\frac{k+fl}{m}$, pre nejaké f, teda žiadny člen nemá valuáciu menšiu ako $v_r(\frac{1}{m})$, čo je v našom prípade spor. Preto $r \mid k$.

Samozrejme platí $r \nmid l$, keďže k, l, m sú nesúdeliteľné. $v_r(a_{p+1}^2) = v_r(\frac{(k+pl)^2}{m^2})$, z toho ale vidíme, že r musí deliť čitateľa, keďže sme už zistili že každý člen postupnosti má r-valuáciu aspoň $v_r(\frac{1}{m})$. Podobne dôjdeme na to, že r delí aj čitateľa a_{q+1}^2.

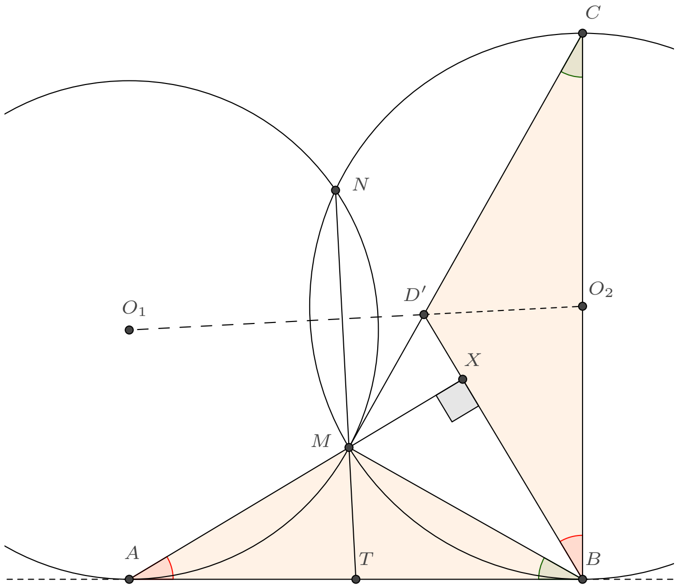
[1] Symbolom $v_r(x)$ označujeme najvyššiu mocninu prvočísla r, ktoré delí x. A ak r delí menovateľa x, tak je to záporná mocnina. Inak povedané $r^{-v_r(x)}x$ je celé číslo nedeliteľné r.

Potom ale $r \mid (k+pl)^2 \Rightarrow r \mid (k+pl) \Rightarrow r \mid pl \Rightarrow r \mid p$ analogicky $r \mid q$, čo je spor s nesúdeliteľnosťou p, q.

Preto naozaj $m = 1$, a a_1 a d sú celé čísla, a potom aj celá postupnosť sú celé čísla, čo sme chceli ukázať. *(Martin „Vodka“ Vodička, Samuel Sládek)*

Úloha G3. *Dve kružnice k_1 a k_2 so stredmi v bodoch O_1 a O_2 sa pretínajú v bodoch M, N. Ich spoločná dotyčnica t bližšia ku M sa dotýka k_1 v bode A a k_2 v bode B. Bod C je taký bod na kružnici k_2, že BC je priemer. Ďalej D je priesečník priamky O_1O_2 s priamkou kolmou na AM prechádzajúcu bodom B. Dokážte, že M, D a C ležia na jednej priamke.*

Riešenie. Budeme riešiť úlohu pre konfiguráciu na obrázku. V ostatných prípadoch sa dôkaz líši len v konkrétnostiach v počítaní uhlov.



Označme X projekciu B na AM. Ďalej označme D' priesečník priamok BX a CM. Náš cieľ je ukázať, že O_1, D', O_2 ležia na priamke.

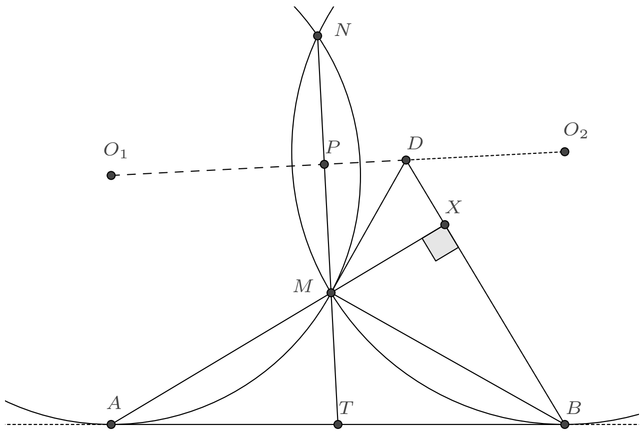
Z vety o úsekovom uhle plynie rovnosť zelených uhlov na obrázku ($\sphericalangle D'CB = \sphericalangle MCB = \sphericalangle MBA$). Ďalej zrejme $\sphericalangle CBD' = 90° - \sphericalangle D'BA = \sphericalangle BAM$. Podľa vety *uu* sú teda trojuholníky ABM, BCD' podobné. Existuje teda špirálna podobnosť, ktorá zobrazuje jeden na druhý. Pritom uhol tejto podobnosti je $90°$, keďže $AB \perp BC$. Tiež je zrejme O_2 stred BC. Označme ešte T priesečník MN a AB. Z mocnosti bodu T ku kružniciam zrejme plynie $|TA| = |TB|$. Priamky MT, $D'O_2$ sú teda ťažnice v nami uvažovaných podobných trojuholníkoch. Takže aj tieto ťažnice musia zvierať uhol $90°$. Priamky O_2D', TM sú teda kolmé. Zrejme ale tiež priamky O_2O_1 a TM sú na seba kolmé. Z toho už musí plynúť, že O_2, D', O_1 ležia na priamke, čo bolo treba dokázať.

Iné riešenie. Najprv označme priesečníky MN s O_1O_2, resp. AB ako P, resp. T. Ako v predošlom riešení, T je stred AB. Ďalej si uvedomme, že bod C v skutočnosti ani nepotrebujeme.

Dokazované tvrdenie je ekvivalentné tomu, že $|DM|^2 = |DX| \cdot |DB|$. Túto rovnosť skrátka vypočítame: Pritom z mocnosti bodu D ku (AXB) máme, že $|DX| \cdot |DB| = |DT|^2 - |TB|^2$, keďže T je zrejme jej stred. Ďalej už len počítame:

$$
\begin{aligned}
&|DX| \cdot |DB| && \\
&= |DT|^2 - |TB|^2 && \text{mocnosť } D \text{ ku } (ABM) \\
&= |DP|^2 + |TP|^2 - |TB|^2 && \text{Pytagorova veta pre } \triangle DPT \\
&= |DM|^2 - |MP|^2 + |TP|^2 - |TB|^2 && \text{Pytagorova veta pre } \triangle DPM \\
&= |DM|^2 + (|TP| - |MP|)(|TP| + |MP|) - |TB|^2 && \text{algebraická úprava} \\
&= |DM|^2 + |TM| \cdot |TN| - |TB|^2 && \text{sčítanie úsečiek} \\
&= |DM|^2 && \text{mocnosť } T \text{ ku } k_1 \text{ a } k_2
\end{aligned}
$$

To je presne vzťah, ktorý sme chceli dokázať.



(Patrik Bak)