Riešenia 4. série

Úloha N4. *Nájdite všetky funckie $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N}$ také, že pre všetky kladné racionálne čísla x, y platí*

$$f(xy)NSD\left(f(x)f(y), f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right)\right) = xyf\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right).$$

Riešenie. Najprv dosadíme do našej rovnice dvojicu $[1, 1]$ a dostaneme $f(1)\mathrm{NSD}(f(1)^2, f(1)^2) = f(1)^2$, z čoho nutne $f(1) = 1$, keďže obor hodnôt funkcie f sú prirodzené, a teda kladné čísla.

Teraz dosadíme dvojice $[q, 1]$ a $[1/q, 1]$ a s využitím $f(1) = 1$ dostaneme nasledujúce vzťahy:

$$f(q)\mathrm{NSD}\left(f(q), f\left(\frac{1}{q}\right)\right) = qf\left(\frac{1}{q}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{q}\right)\mathrm{NSD}\left(f\left(\frac{1}{q}\right), f(q)\right) = \frac{1}{q}f(q)$$

Ak tieto dve rovnice medzi sebou vynásobíme, tak dostávame $\mathrm{NSD}(f(q), f(1/q))^2 = 1$, čiže $\mathrm{NSD}(f(q), f(1/q)) = 1$.

Po dosadení do prvej rovnice máme, že $f(q) = qf(1/q)$ a po predelení $f(1/q)$ máme

$$\frac{f(q)}{f\left(\frac{1}{q}\right)} = q.$$

My vieme, že každé racionálne číslo sa dá jednoznačne zapísať ako podiel dvoch nesúdeliteľných čísel. A my sme ho tak práve napísali. Z toho vyplýva, že ak $q = \frac{a}{b}$, kde a, b sú nesúdeliteľné, tak $f(q) = a$. Alebo všeobecne to môžeme napísať, že $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{\mathrm{NSD}(a,b)}$. Dostali sme jedinú možnú vyhovujúcu funkciu. Na záver ešte musíme urobiť skúšku, aby sme overili, či naozaj vyhovuje:

Nech $x = \frac{a}{b}$ a $y = \frac{c}{d}$, kde a, b aj c, d sú nedúdeliteľné. Potom máme

$$f\left(\frac{ac}{bd}\right)\mathrm{NSD}\left(f\left(\frac{a}{b}\right)f\left(\frac{c}{d}\right), f\left(\frac{b}{a}\right)f\left(\frac{d}{c}\right)\right) = \frac{ac}{\mathrm{NSD}(ac, bd)}\mathrm{NSD}(ac, bd) = ac$$

$$\frac{ac}{bd}f\left(\frac{b}{a}\right)f\left(\frac{d}{c}\right) = \frac{ac}{bd}bd = ac.$$

Vidno, že skúška sedí. Vyhovuje jediná funkcia, a to $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{\mathrm{NSD}(a,b)}$

(Martin „Vodka“ Vodička)

Úloha A4. *Nech n je prirodzené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú dané reálne čísla so súčtom 0. Nájdite maximum výrazu $x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$ (v závislosti od $a_1, \ldots, a_n$), ak viete, že $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sú reálne čísla, pre ktoré platí $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 \leq 1$.*

Riešenie. Pre $i = 1, 2, \ldots, n-1$ označme $y_i = x_i - x_{i+1}$ a $A_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_i$. Podmienka zo zadania má potom tvar $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leq 1$. Podľa zadania $a_n = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$. Skúmaný výraz potom môžeme ekvivalentne prepísať:

$$\begin{aligned}
&x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n = \\
&= a_1(x_1 - x_n) + a_2(x_2 - x_n) + \cdots + a_{n-1}(x_{n-1} - x_n) \\
&= a_1((x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_n)) + \\
&\quad + a_2((x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) + \cdots + (x_{n-1} - x_n)) + \cdots + a_{n-1}(x_{n-1} - x_n) \\
&= a_1(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + a_2(y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + \cdots + a_ny_{n-1} \\
&= y_1a_1 + y_2(a_1 + a_2) + y_3(a_1 + a_2 + a_3) + \cdots + y_{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \\
&= y_1A_1 + y_2A_2 + y_3A_3 + \cdots + y_{n-1}A_{n-1}
\end{aligned}$$

Podľa Cauchy–Schwarzovej nerovnosti a prepísanej podmienky zo zadania potom máme

$$(y_1A_1+y_2A_2+\cdots+y_{n-1}A_{n-1})^2 \leq (y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2)(A_1^2+A_2^2+\cdots+A_{n-1}^2) \leq (A_1^2+A_2^2+\cdots+A_{n-1}^2)$$

Po odmocnení nerovnosti a použití $x \leq |x|$ potom máme

$$y_1A_1 + y_2A_2 + \cdots + y_{n-1}A_{n-1} \leq \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_{n-1}^2}$$

Na dôkaz, že hľadané maximum je naozaj $\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_{n-1}^2}$, stačí ukázať, že v poslednej nerovnosti nastáva rovnosť. Tá je triviálna, keď $A_1 = A_2 = \cdots = A_{n-1} = 0$ (vtedy môžeme vziať napríklad $y_1 = 1$, $y_2 = y_3 = \cdots = y_{n-1} = 0$). V opačnom prípade $A_1^2+A_2^2+\cdots+A_{n-1}^2 > 0$ a môžeme teda definovať

$$y_i = \frac{A_i}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_{n-1}^2}}$$

pre $i = 1, 2, \ldots, n-1$. V každom prípade, $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ zrejme spĺňajú $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2 \leq 1$. Postupnosť $x_1, x_2, \ldots, x_n$ potom zrekonštrujeme nasledovne:

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= y_{n-1} + x_n \\ x_{n-2} &= y_{n-2} + x_{n-1} \\ &\vdots \\ x_1 &= y_1 + x_2, \end{aligned}$$

pričom x_n je ľubovoľné. Tým sme dokázali že hodnota $\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_{n-1}^2}$ je naozaj maximum skúmaného výrazu. *(Patrik Bak a Laura Vištanová)*

Úloha G4. *Nech D, E, F sú päty výšok ostrouhlého trojuholníka ABC postupne z vrcholov A, B, C. Nech P je taký bod na priamke EF, že $|PF| = |DE|$ a F leží medzi E a P. Podobne, nech Q je taký bod na priamke EF, že $|QE| = |DF|$ a E leží medzi F a Q. Označme $X \neq E$ priesečník priamky AC s kružnicou opísanou trojuholníku DPE a $Y \neq F$ priesečník priamky AB s kružnicou opísanou trojuholníku DQF . Dokážte, že stred strany BC leží na priamke XY.*

Riešenie. Na začiatok by sa nám hodilo ukázať, že body $PDEX$ a $FDQY$ ležia na svojich kružniciach tak, ako boli vymenované. Spravíme to pre $PDEX$. Označme si uhly pri A, B, C klasicky α, β, γ. Na to, aby platilo, že bod X leží na úsečke EC by muselo platiť, že uhol $|\sphericalangle DPE| \geq \beta$. Prečo? Potom by dotyčnica ku kružnici opísanej PED v bode E zvierala s priamkou ED uhol väčší, ako s ňou zviera priamka EC, a teda kružnica by pretla úsečku EC v bode rôznom od E. My však ukážeme: $|\sphericalangle DPE| < \beta$. Uhol $|\sphericalangle PED| = |180^\circ - 2\beta$, čo je známy fakt ohľadom piat výšok (a ľahko sa dá vyuhliť). Preto platí: $|\sphericalangle DPE| + |\sphericalangle PDE| = 2\beta$. Stačí teda ukázať: $|\sphericalangle DPE| < |\sphericalangle PDE|$. To ale triviálne vyplýva z toho, že $|DE| < |DE| + |FE| = |FP| + |FE| = |PE|$, čo sú strany nad inkriminovanými uhlami. Z toho už nám vyplýva nami želané poradie.

Predpokladajme, že bod X leží na úsečke AC (z neskoršieho postupu bude vyplývať, že aspoň jeden z X, Y ležia v trojuholníku a potom to už je BUNV). Označme stred úsečky FE ako K a stred BC ako M. Úlohu si rozdelíme na dve časti - v prvej ukážeme, že kolmica na FE cez K prechádza cez M (ľahšia časť) a v druhej ukážeme, že body K, X, Y ležia na priamke ktorá je kolmá na FE. Uvedomme si, že toto nám na dôkaz tvrdenia stačí, keďže sa zrejme jedná o tú istú priamku.

Na dôkaz prvej časti nám stačí si uvedomiť, že z toho, že E, F sú päty výšok vyplýva, že $BCEF$ je tetivový so stredom opísanej kružnice v M. Potom MEF je rovnostranný, a teda MK je na EF kolmé.

Druhá časť je už trošku náročnejšia, ale zvládneme aj tú. Na začiatok trochu pohúlime (pardon, pouhlíme). Štvoruholníky $BDEA$, $DEXP$ sú tetivové, preto $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - |\sphericalangle DEX| = 180^\circ - (180^\circ - |\sphericalangle XPD|) = |\sphericalangle XPD| = \beta$. Ako som už spomínal, platí $|\sphericalangle DEF| = 180^\circ - 2\beta$. Opäť z obvodových uhlov ho vieme preniesť na $\sphericalangle PXD$. Ľahkým počítaním zisťujeme, že PDX je rovnoramenný. Všimnime si teraz dvojicu trojuholníkov DEX a PFX. Z obvodových uhlov dostávame $|\sphericalangle FPX| = |\sphericalangle XDE|$. Zároveň z rovnoramennosti a zo zadania máme $|PX| = |XD|$ a $|ED| = |PF|$. To ale podľa vety SUS znamená, že trojuholníky XED a XFP sú zhodné! Nám bude stačiť, že sú podobné.

Podobnosť a orientácia týchto trojuholníkov nám naznačuje, že sa na seba zobrazujú v špirálnej súmernosti so stredom X. Podľa vety, že špirálka chodí po dvoch sa na seba v rovnakej súmernosti zobrazujú aj trojuholníky FEX a XDP. Z toho ale vyplýva, že FEX je rovnoramenný. Teda XK je kolmé na FE.

Analogicky by sa dalo ukázať, že aj trojuholník FEY je rovnoramenný, a teda že KY je kolmé na FE. Úvahy neovplyvní ani fakt, že Y leží mimo AB, (ak leží). Po tom, že dokážeme toto je nám však jasné, že práve jeden z X, Y leží v ABC, lebo ľubovoľná priamka pretína práve dve strany trojuholníka (ak neprechádza vrcholom, čo sa v našom prípade môže stať, ale potom by bol ABC rovnoramenný a naša úloha triviálna) a stranu BC priamka kolmá na FE cez K už pretína.

Teraz už vieme, že na priamke kolmej na FE cez K ležia všetky tri body M, X, Y, a teda sami ležia na priamke. Tým je naša úloha dokázaná.

Úloha C4. *V rade je $2n-1$ lámp. Na začiatku je iba stredná (n-tá) zapnutá. Dovolené je zobrať dve nesusediace vypnuté lampy také, že všetky lampy medzi nimi sú zapnuté a prepnúť všetky tieto lampy (zo zapnutej na vypnutú a naopak). Koľko najviac takýchto ťahov môžeme urobiť?*

Riešenie. (inšpirované riešením *Radka Olšáka*)

Na začiatok si všimnime, že v prípade $n = 1$ sa nedá urobiť žiaden ťah. Ďalej preto predpokladajme, že $n \geq 2$. Prvých $n-1$ lámp interpretujme ako číslo v dvojkovej sústave, kde zapnutá lampa znamená 1 a vypnutá lampa znamená 0. Toto číslo budeme označovať A. Na začiatku zjavne platí $A = 0$. Tak isto zoberme posledných $n-1$ lámp a tiež ich interpretujme ako číslo v dvojkovej sústave, ale napísané odzadu. (T.j. posledná lampa zodpovedá 2^{n-2} a $(n+1)$-vá lampa zodpovedá 2^0). Toto číslo označme ako B. Na začiatku tak isto $B = 0$. Okrem toho označme číslo strednej lampy (0 alebo 1) C. Každý stav tak vieme popísať trojicou čísel (A, B, C), kde $0 \leq A, B \leq 2^{n-1} - 1$ a $0 \leq C \leq 1$. Na začiatku sme v stave $(0, 0, 1)$.

Budeme teraz rozlišovať 3 typy ťahov podľa toho, čo sa deje so strednou lampou a pozrieme sa, čo robia s našou trojicou (A, B, C).

- X Toto bude taký ťah, ktorým zapneme strednú lampu.Nech sa druhá lampa, ktorú sme zapli nachádza v prvej polovici. Potom sme zjave týmto ťahom zväčšili A o 1 a B sme nezmenili. To druhé je jasné, a to prvé vyplýva z toho, že sme $0111\ldots1$ na konci binárneho čísla nahradili $1000\ldots0$. To znamená, že vieme prejsť od trojice $(A, B, 0)$ k $(A+1, B, 1)$. Môžeme to však urobiť len v prípade, že na konci A je aspoň jedna cifra 1, t.j. keď A je nepárne. Symetricky (ak druhá lampa, ktorú sme zapli je v druhej polovici) vieme prejsť od $(A, B, 0)$ k $(A, B+1, 1)$, ak B je nepárne.
- Y Toto bude taký ťah, ktorým vypneme strednú lampu. Podobne ako v pri ťahu typu X si rozmyslíme, že prechádzame od $(A, B, 1)$ k $(A+1, B+1, 0)$ a môžeme tak urobiť vždy, bez ohľadu na A, B.
- Z Toto je ťah, ktorý neurobí nič so strednou lampou. To znamená, že dve lampy, ktoré sme zapli, sa nachádzajú obe buď v prvej, alebo v druhej polovici. Ak sú v prvej polovici a

zapli sme i-tu a j-tu lampu ($i < j \leq n-1$), tak sa nám číslo A zväčšilo o $2^{n-i-1} - 2^{n-i-2} - \ldots - 2^{n-j} + 2^{n-j-1} = 2^{n-j} + 2^{n-j-1} = 3 \cdot 2^{n-j-1} \geq 3 \cdot 1 = 3$. Analogicky, ak sú v druhej polovici.

Pozrime sa teraz na súčet $A+B+\frac{C}{2}$. Ťahy typu X ho zväčšujú o $\frac{3}{2}$, ťahy typu Y ho zväčšujú o $\frac{3}{2}$ a ťahy typu Z aspoň o 3. Zjavne súčet $A+B+\frac{C}{2}$ nemôže byť väčší ako $2 \cdot (2^{n-1}-1)$, pretože nemôžu byť zasvietené všetky lampy, keďže každým ťahom aspoň jednu zhasneme. A toto zodpovedá hodnote, ak je zhasnutá len stredná lampa, inak by to bolo ešte menej. Na začiatku je tento súčet $\frac{1}{2}$. Preto ak označíme x, y, z počty ťahov jednotlivých typov, tak platí $\frac{3}{2}(x+y) + 3z \leq 2 \cdot (2^{n-1}-1) - \frac{1}{2}$.

Z toho máme, že

$$x+y+z \leq \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}(x+y)+3z\right) \leq \frac{2}{3}\left(2 \cdot (2^{n-1}-1)) - \frac{1}{2}\right) = \frac{2^{n+1}-5}{3}.$$

No $x+y+z$ je počet všetkých ťahov. Navyše vieme, že to je celé číslo. To znamená, že najviac vieme urobiť $\lfloor \frac{2^{n+1}-5}{3} \rfloor$ ťahov. Pre párne n to je max. $\frac{2^{n+1}-5}{3}$ a pre nepárne n $\frac{2^{n+1}-7}{3}$ ťahov.

Spomínaný počet vieme skonštruovať jednoducho. Totiž striedaním ťahov typu X a Y vieme urobiť nasledovnú vec:

$$(6k, 6k, 1) \to (6k+1, 6k+1, 0) \to (6k+2, 6k+1, 1) \to (6k+3, 6k+2, 0) \to (6k+4, 6k+2, 1) \to$$
$$\to (6k+5, 6k+3, 0) \to (6k+5, 6k+4, 1) \to (6k+6, 6k+5, 0) \to (6k+6, 6k+6, 1)$$

Všimnime si, že sme naozaj ťah X robili len ak príslušné A resp. B bolo nepárne - teda sme ho naozaj mohli urobiť.

To znamená že použitím takýchto 8 ťahov vieme A aj B zvýšiť o 6. To znamená, že v prípade párneho n sa za $\frac{8}{6}(2^{n-1}-2)$ ťahov dostaneme na $(2^{n-1}-2, 2^{n-1}-2, 0)$ po čom môžeme ešte urobiť jeden ťah typu Y a sme skončili. Spolu sme urobili $\frac{4}{3}(2^{n-1}-2)+1 = \frac{2^{n+1}-5}{3}$ ťahov, čo je to, čo sme chceli.

V prípade nepárneho n sa dostaneme na $(2^{n-1}-4, 2^{n-1}-4, 0)$, po $\frac{8}{6}(2^{n-1}-4)$ čom ešte môžeme urobiť 3 ťahy typov Y, X, Y. Spolu urobíme $\frac{4}{3}(2^{n-1}-4)+3 = \frac{2^{n+1}-7}{3}$ ťahov.

Preto odpoveď je, že pre $n=1$ nevieme urobiť žiadne ťahy, a pre $n \geq 2$ to je $\lfloor \frac{2^{n+1}-5}{3} \rfloor$ ťahov.

(Martin „Vodka“ Vodička)