

Riešenia 2. série

Úloha N2. Lucka má na tabuli n po sebe idúcich čísel a má n štítkov s nápisom: „Toto číslo nie je deliteľné číslom i .“, pre $i \in \{2, 3, \dots, n+1\}$. Každý štítok umiestni vedľa čísla na tabuli tak, aby každé číslo malo presne jeden štítok. Za správne umiestnený štítok dostane Lucka cukrík. Koľko najviac cukríkov môže Lucka zaručene získať bez ohľadu na čísla napísané na tabuli?

Riešenie. Odpoveď je $n-1$. Najskôr ukážem, že viac ako $n-1$ štítkov sa pre niektoré počiatočné čísla nedá získať. Zvoľme počiatočné čísla od $(n+1)!$ po $(n+1)! + n-1$. Potom zjavne $(n+1)!$ nemôže mať žiadny štítok priradený správne, teda nám ostalo len $n-1$ čísel, ktoré môžu mať správne štítok, a teda len $n-1$ štítkov môže byť správne priradených.

Teraz ukážem, že $n-1$ štítkov vždy ide priradiť. To ukážem indukciou. Pre $n=1$ tvrdenie triviálne platí – zrejme sa vždy dá mať správne priradených aspoň 0 štítkov. Ukážem teraz, že ak tvrdenie platí pre n , platí aj pre $n+1$. Zoberme si ľubovoľných $n+1$ po sebe idúcich čísel. Rozdiel prvého a posledného z nich je potom n . Zrejme teda aspoň jedno z nich nie je deliteľné $n+2$. Priradme tomu z nich, ktorý nie je deliteľný $n+2$ (ak nie je ani jeden, hociktorému) štítok $n+2$ – ten je správne priradený. A ostalo nám n po sebe idúcich čísel a štítky od 2 do $n+1$, teda z indukčného predpokladu vieme správne priradiť ešte aspoň $n-1$ štítkov.

(Dominik Rigasz)

Úloha G2. V ostrouhlom rôznostrannom trojuholníku ABC pretína os vnútorného uhla BAC stranu BC v bode E a kratší oblúk BC kružnice jemu opísanej v bode M . Uvážme bod D na kratšom oblúku BC kružnice opísanej trojuholníku ABC taký, že $|ED| = |EM|$. Nech $P \neq A$ je bod na úsečke AD taký, že $|\angle ABP| = |\angle ACP|$. Následne nech O je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC . Dokážte, že $OP \perp AM$.

Riešenie. Nech Q je obrazom bodu M podľa BC . Chceme dokázať, že body P a Q sú kamaráti. Vieme, že $AEOQ$ je tetivový, lebo

$$\angle EQO = \angle EMO = \angle EAO$$

Všimnime si, že máme tiež

$$\angle MAQ = \angle EOM = \frac{1}{2} \angle DOM = \angle DAM = \angle MAP$$

Všimnime si tiež, že bod P je jednoznačne definovaný. Nech Q^* je kamarátom bodu Q . Potom bod Q^* leží na úsečke AD a $\angle ABQ^* = \angle ACQ^*$, takže $Q^* = P$, ako sme chceli dokázať.

Teraz si všimnime, že $BCOP$ je tetivový, pretože

$$\begin{aligned} \angle BPC &= \angle BAC + \angle ABP + \angle ACP = \angle BAC + \angle CBQ + \angle BCQ = \\ &= \angle BAC + \angle CBM + \angle BCM = 2\angle BAC = \angle BOC \end{aligned}$$

Tiež $DMOP$ je tetivový, pretože

$$\begin{aligned} \angle MOP &= \angle COP - \angle COM = 180^\circ - \angle CBP - \angle BAC = \\ &= 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC + \angle QBC = \angle ACM = 180^\circ - \angle MDP \end{aligned}$$

Na záver máme $OA = OM$, takže stačí, ak

$$\angle OAP = \angle ODP = \angle OMP,$$

čo necháme na čitateľa, aby si overil

()

Úloha C2. Majme $n \geq 2$ daných bodov v rovine $X_1, X_2, \dots, X_n$ a nech $r > 0$ je reálne číslo. Krivoš a Dominik hrajú nasledujúcu hru. Najprv Krivoš zostrojí súvislý graf s vrcholmi v bodoch

$X_1, X_2, \dots, X_n$. Potom priradí každému vrcholu X_i nezáporné reálne číslo r_i , pre $i = 1, \dots, n$, aby platilo $\sum_{i=1}^n r_i = 1$. Následne Dominik vyberie postupnosť $k+1$ navzájom rôznych vrcholov $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_{k+1}}$, že $X_{i_1} = X_1$ a pre každé $j = 1, 2, \dots, k$ sú X_{i_j} a $X_{i_{j+1}}$ spojené hranou.¹ Dominik vyhrá, ak platí

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k+1} r_{i_j} \geq r,$$

v opačnom prípade vyhráva Krivoš. V závislosti od n určte najväčšiu možnú hodnotu r , pre ktorú má Dominik víťaznú stratégiu.

Riešenie. Požadované maximum je

$$\frac{1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} = \begin{cases} \frac{4}{(n+1)^2} & \text{ak } n \text{ je nepárne,} \\ \frac{4}{n(n+2)} & \text{ak } n \text{ je párne,} \end{cases}$$

a je dosiahnuté grafom opísaným na konci riešenia.

Uvažujme čísla r_i , ktoré Krivoš priradí vrcholom X_i . Ak nahradí svoj graf niektorou z jeho kostier, Dominikovu úlohu to len sťaží, takže predpokladáme, že zostrojil strom.

Teraz predpokladajme, že zostrojil graf a priradil nejaké čísla r_i vrcholom. Ukážeme, ako tieto čísla upraviť tak, aby Dominikova úloha nebola jednoduchšia.

Uvažujme každý list X_i s $i > 1$ a priradíme mu súčet čísel na (jedinej) ceste z X_1 do X_i ; všetky ostatné čísla nahradíme nulami. Potom súčet, ktorý Dominik získa na každej ceste, sa nezvyší. Na druhej strane, každé číslo vo vrchole je započítané aspoň v jednom liste, takže celkový súčet čísel sa nezmenší. Krivoš teraz môže znížiť čísla v listoch tak, aby splnil podmienku na súčet.

Problém teraz znie: Uvažujme strom s n vrcholmi, zakorenený v X_1 . Nech $L_1, \dots, L_k$ sú listy tohto stromu rôzne od koreňa a nech d_i je počet vrcholov na ceste z X_1 do L_i . Máme zvoliť nezáporné čísla $s_1, \dots, s_k$ so súčtom 1 tak, aby sa minimalizoval výraz.

$$r = \max_{1 \leq i \leq k} \frac{s_i}{d_i}.$$

Nech $d = \max_i d_i$. Bez ujmy na všeobecnosti nech $d = d_1$. Potom cesta z X_0 do L_1 má $d-1$ vrcholov odlišných od L_i , takže $k \leq n - (d-1)$. Teda,

$$r \geq \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{s_i}{d_i} \geq \frac{1}{dk} \sum_{i=1}^k s_i = \frac{1}{dk} \geq \frac{1}{d(n-d+1)} \geq \frac{1}{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}.$$

Rovnosť nastáva napríklad vtedy, keď $d = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ a graf pozostáva z cesty dĺžky $d-1$, ktorej jeden koncový bod je X_0 , a ku druhému je pripojených $n-d+1 = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ listov. Každému z týchto listov sa priradí číslo $\frac{1}{n-d+1}$, pričom všetkým ostatným vrcholom sa priradia nuly.

(Adam „Džavo“ Džavoronok)

Úloha A2. David mal dnes naozaj dobrý deň. Preto si na vyváženie svojho dňa vybral klesajúcu funkciu $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, ktorá nadobúda všetky kladné reálne hodnoty, a kladné čísla $a_1 \neq b_1$. Čísla $a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ spĺňajú

$$a_{n+1} = a_n + f(b_n), \quad b_{n+1} = b_n + f(a_n)$$

pre každé $n \geq 1$. Ukážte, že existuje prirodzené číslo m také, že $|a_m - b_m| > 2^{2025}$.

¹Dĺžka $k \geq 1$ nie je pevne daná ale prvý zvolený vrchol musí byť vždy X_1 .

Riešenie. Funkce f je zjevně spojitá a BÚNO předpokládáme $a_1 > b_1$ a označme $d_n = a_n - b_n$. Indukcí ukážeme, že $a_n > b_n$ a $d_{n+1} > d_n$. Ze zadání máme $d_{n+1} = d_n + f(b_n) - f(a_n)$ a díky indukčnímu předpokladu $a_n > b_n$ je $f(b_n) > f(a_n)$, takže opravdu $d_{n+1} > d_n$. Tím pádem $d_{n+1} > d_1 > 0$, tedy i $a_{n+1} > b_{n+1}$, jak jsme chtěli.

Po zbytek řešení budeme pro spor předpokládat, že $d_n \leq 2^{2025}$ pro všechna n , neboli díky tomu, že posloupnost d_n roste, tak má nějakou limitu L , tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = L$. Posloupnost b_n je zjevně rostoucí (protože $f(x) > 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$) a my ukážeme, že není shora omezená. Pokud by byla omezená shora nějakým číslem M , tak bychom pak měli $a_{n+1} = a_n + f(b_n) \geq a_n + f(M)$, takže pak jednoduchou indukcí $a_{n+1} \geq a_1 + n f(M)$, tedy posloupnost a_n není shora omezená a musí po nějaké době přesáhnout hodnotu $2^{2025} + M$, jak jsme chtěli. Dále předpokládáme, že b_n není shora omezené.

Zvolme si nyní $N = \left\lfloor \frac{d_n}{f(a_n)} \right\rfloor$ pro nějaké n (dost velké, aby $N > 0$), tedy $\frac{d_n}{f(a_n)} - 1 < N \leq \frac{d_n}{f(a_n)}$. Pak ale pro $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} b_{n+k+N} &= b_{n+k} + f(a_{n+k}) + f(a_{n+k+1}) + \cdots + f(a_{n+k+N-1}) < b_{n+k} + N f(a_{n+k}) \leq \\ &\leq b_{n+k} + \frac{d_n}{f(a_n)} f(a_n) = b_{n+k} + d_n \leq b_{n+k} + d_{n+k} = a_{n+k} \end{aligned}$$

Z toho umíme odhadnout součet:

$$\begin{aligned} f(b_{n+k}) - f(a_{n+k}) + f(b_{n+k+N}) - f(a_{n+k+N}) + \cdots + f(b_{n+k+uN}) - f(a_{n+k+uN}) \geq \\ \geq f(b_{n+k}) - f(a_{n+k+uN}) \end{aligned}$$

Protože ale a_{n+k+uN} není s rostoucím u shora omezené (díky tomu, že jsme předtím ukázali, že b_n není shora omezené a $N > 0$), tak $f(a_{n+k+uN})$ se limitně blíží k nule, tedy:

$$\sum_{u=0}^{\infty} f(b_{n+k+uN}) - f(a_{n+k+uN}) \geq f(b_{n+k})$$

S tím už jsme ale skoro hotovi, protože:

$$\begin{aligned} L - d_n = \sum_{i=n}^{\infty} f(b_i) - f(a_i) &\geq f(b_n) + f(b_{n+1}) + \cdots + f(b_{n+N-1}) \geq N f(a_n) > \\ &> f(a_n) \left(\frac{d_n}{f(a_n)} - 1 \right) = d_n - f(a_n) \end{aligned}$$

Máme tedy nerovnost $L > 2d_n - f(a_n)$ pro dost velká n , což je spor, protože $\lim_{n \rightarrow \infty} 2d_n - f(a_n) = 2L$ a také víme, že $L > 0$.

Alternatívne riešenie. Budeme postupovat stejně jako v předchozím řešení do chvíle, než jsme ukázali, že posloupnost b_n není shora omezená. Dále ukážeme následující lemma.

Lemma. Pro každé n takové, že $f(b_n) < \frac{d_1}{2}$, existuje $m \geq n$, že $d_m > d_n + \frac{d_1}{4}$.

Dôkaz. Označme jako l největší číslo takové, že $b_{n+l} < a_n$. Potom ale $a_n - b_{n+l} \leq \frac{d_1}{2}$. V opačném případě by bylo $b_{n+l+1} = b_{n+l} + f(a_{n+l}) < b_{n+l} + f(b_n) < b_{n+l} + \frac{d_1}{2} < a_n$, což je spor s maximalitou l . (Nerovnost $b_n < a_{n+l}$ plyne triviálně z monotónnosti a_n .)

Budeme uvažovat pouze $m > n + l$. Pak pro rozdíly platí následující vztah:

$$d_m = d_n + \sum_{j=n}^{m-1} f(b_j) - f(a_j) = d_n + \sum_{j=n}^{n+l-1} f(b_j) + \sum_{j=n}^{m+l-1} (f(b_{j+l}) - f(a_j)) - \sum_{j=m-l}^{m-1} f(a_j)$$

První součet můžeme odhadnout jako:

$$\sum_{j=n}^{n+l-1} f(b_j) = a_{n+l} - a_n \geq a_{n+l} - b_{n+l} - \frac{d_1}{2} = d_{n+l} - \frac{d_1}{2} \geq d_1 - \frac{d_1}{2} = \frac{d_1}{2}$$

Díky tomu, že posloupnost a_n není shora omezená, tak si můžeme zvolit m takové, že $f(a_{m-l}) < \frac{d_1}{4l}$, pak poslední součet odhadneme jako:

$$\sum_{j=m-l}^{m-1} f(a_j) \leq lf(a_{m-l}) < \frac{d_1}{4}$$

A nakonec protože $b_{n+l} < a_n$, tak obdobně jako na začátku můžeme indukcí ukázat, že $b_{j+l} < a_j$ pro každé $j \geq n$, tím pádem poslední součet můžeme odhadnout zdola nulou, protože je každý ze sčítanců kladný. Dohromady tedy:

$$d_m = d_n + \sum_{j=n}^{m-1} f(b_j) - f(a_j) \geq d_n + \frac{d_1}{2} + 0 - \frac{d_1}{4} = d_n + \frac{d_1}{4}$$

□

Protože ale b_n roste donekonečna, tak od nějaké chvíle platí $f(b_n) < \frac{d_1}{2}$. Potom ale zaručeně vždy umíme současný rozdíl d_n zvětšit o $\frac{d_1}{4}$, takže umíme získat rozdíl větší než $d_n + K \frac{d_1}{4}$ pro libovolné K . Pro dost velké K ale platí $d_n + K \frac{d_1}{4} \geq 2^{2025}$, jak jsme chtěli.

(David Hromádka)