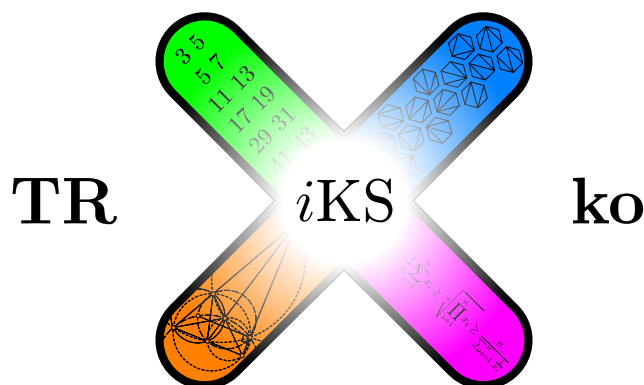




Úloha 1. Necht $s(n)$ značí ciferný součet přirozeného čísla. Pro nějaké přirozené číslo $N \in \mathbb{N}$ platí, že $s(N) = 10000$ a $s(5N) = 5000$. Může se stát, že N je liché?

Úloha 2. Je dán trojúhelník ABC . Označme A' druhý průsečík výšky z A s kružnicí opsanou ABC . Ať A'_B, A'_C jsou obrazy bodu A' podle přímek po řadě AB a AC a označme si ℓ_A přímkou skrz $A'_B A'_C$. Analogicky definujme přímky ℓ_B a ℓ_C . Dokaž, že se přímky ℓ_A, ℓ_B a ℓ_C protínají v jednom bodě.

Úloha 3. Máme v kruhu 2022 lidí z 1011 zemí, dva z každé země. Dokaž, že je můžeme rozdělit do dvou skupin tak, že:

- (1) Ve stejné skupině nejsou dva lidé ze stejné země.
- (2) Ve stejné skupině nejsou tři po sobě jdoucí lidé z kruhu.

Úloha 4. Necht M je množina přirozených čísel taková, že pro každá dvě $a, b \in M$ platí $a^2 - ab + b^2 \mid (ab)^2$. Dokaž, že M má konečně mnoho prvků.

Úloha 5. Dokaž, že pro všechna kladná reálná čísla $a, b, c \in [0, 1]$ platí:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Kdy nastane rovnost?