Zadanie 4. série

Termín odoslania: 7. novembra 2022

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha N4. Nájdite všetky polynómy P s celočíselnými koeficientami také, že pre ľubovoľné prirodzené čísla a, b je $P(a) - P(b)$ násobkom čísla $a + b$.

Úloha C4. Je dané prirodzené číslo $n \geq 3$ a konvexný n-uholník M. Uvažujme ofarbenie vrcholov M tromi farbami. *Trojfarebným* trojuholníkom rozumieme trojuholník, ktorého vrcholy sú vrcholy M a ktoré majú navzájom rôzne farby. Príslušné ofarbenie vrcholov M nazveme *pekné*, pokiaľ každý bod vnútri M zároveň leží v nejakom trojfarebnom trojuholníku.[1] Označme p_n počet pekných ofarbení konvexného n-uholníka. Dokážte, že p_n nezávisí na konkrétnej voľbe n-uholníka M a že pre $n \geq 3$ platí

$$p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n + 6.$$

V úloze jsme měli chybu, ve vzorci měl být konstantní člen 6 a ne 2.

Úloha A4. Je dané prirodzené číslo $n \geq 2$ a reálne čísla $1 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ spĺňajúce $a_1 + \cdots + a_n = 2n$. Pre každé $i = 1, \ldots, n$ potom označme číslo $b_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_i$. Dokážte, že platí

$$b_{n-1} + b_{n-2} + \cdots + b_1 + 2 \leq b_n.$$

Úloha G4. Je dané prirodzené číslo $n \geq 5$ a n-uholník $A_1A_2 \ldots A_n$ v rovine, ktorému je možné opísať kružnicu a zároveň aj vpísať kružnicu. Ďalej označme B_i priesečník priamok $A_{i-1}A_i$ a $A_{i+1}A_{i+2}$ (pri číslovaní vrcholov uvažujeme $A_0 = A_n$, $A_{n+1} = A_1$ a pod.). Dokážte, že existuje kružnica, ktorá sa dotýka všetkých kružníc opísaných trojuholníkom $B_iA_iA_{i+1}$.

[1] Je dovolené aj to, aby ležal len na obvode trojfarebného trojuholníka.