Zadanie 6. série

Termín odoslania: 18. január 2016

Adresa: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovakia

Úloha A6. Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ je postupnosť reálnych čísel taká, že $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{4}{3}$ a pre všetky prirodzené $n \geq 2$ platí $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n a_{n-1}}$.

Dokážte, že $1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq 2a_n$ platí pre všetky prirodzené n.

Úloha G6. Daný je ostrouhlý trojuholník ABC so stredom opísanej kružnice O. Na jeho stranách BC, AC, AB ležia postupne body X, Y, Z. Kružnice opísané trojuholníkom BXZ a CXY sa druhýkrát pretínajú v bode $P \neq X$. Ďalej nech X', Y', Z' sú obrazy X, Y, Z v stredových súmernostiach podľa stredov úsečiek BC, AC, AB. Kružnice opísané trojuholníkom $BX'Z'$ a $CX'Y'$ sa druhýkrát pretínajú v bode $Q \neq X'$. Dokážte, že $|OP| = |OQ|$.

Úloha C6. Na sústredení iKS sú účastníci rozdelení do skupín. Tie sa však každý deň menia a to nasledovným spôsobom: V každej skupine sa zvolí jeden účastník ako najlepší, a potom sa všetci najkepší účastníci odtrhnú od pôvodnej skupiny a vytvoria jednu novú skupinu. Skupina, ktorá mala pred tým len jedného člena tak zanikne. Predpokladajme, že na sústredení je n účastníkov a všetci sú na začiatku v jednej skupine. Dokážte, že v počnúc niektorým dňom sústredenia[1] bude stále v každej skupine najviac $1 + \sqrt{2n}$ ľudí.

Úloha N6. Nec p je prvočíslo také, že $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Ukážte, že $(p-1)(p! + 2^n)$ má aspoň troch rôznych prvočíselných deliteľov pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

[1] sútredenie trvá nekonečne dlho