Zadání 3. série

Termín odeslání: 7. října 2019

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha A3. Reálná čísla a, b, c splňují $|(a-b)(b-c)(c-a)| = 1$. Jaké nejmenší hodnoty může nabývat výraz $|a| + |b| + |c|$?

Úloha N3. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takové, že pro každé $x, y \in \mathbb{N}$ je $xf(x) + 2xf(y) + f(y)^2$ druhou mocninou celého čísla.

Úloha C3. Vodka a Tonda by si přáli vybudovat iKSlandii, kterou by chtěli poctít nejkrásnější úlohy z historie iKSka. Tonda navrhl, že iKSlandia bude složena z n místností věnovaných jednotlivým úlohám, z nichž některé budou propojeny jednosměrnými chodbami. Podle Tondy by z každé místnosti i do každé místnosti měly vést právě dvě chodby. Vodka by naopak chtěl návštěvníkům ulehčit rozhodování o cestě a z Tondova plánu ponechat pro každou místnost jednu chodbu vedoucí do ní a jednu chodbu vedoucí z ní. Ukažte, to Vodka může provést 2^k způsoby pro nějaké přirozené k.

Úloha G3. Nechť E je střed kružnice připsané proti bodu A v trojúhelníku ABC. Body X a Y leží na polopřímkách opačných k BA, CA takovým způsobem, že $AXEY$ je tětivový čtyřúhelník. Na úsečkách BE, CE nalezneme body S a T takové, že $|\angle AXE| = |\angle BTE|$ a $|\angle AYE| = |\angle CSE|$. Průsečík BT a CS nazveme K. Ukažte, že XY, ST a EK se protínají v jednom bodě.