Zadanie 6. série

Termín odoslania: 24. ledna 2022

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha N6. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, ktoré pre ľubovolné $m, n \in \mathbb{N}$ spĺňajú rovnosť

$$\gcd(f(m), n) + \operatorname{lcm}(m, f(n)) = \operatorname{lcm}(f(m), n) + \gcd(m, f(n)),$$

kde gcd a lcm označujú najväčší spoločný deliteľ a najmenší spoločný násobok.

Úloha G6. Buď ABC pravouhlý trojuholník s pravým uhlom pri vrchole A, v ktorom je M stred strany BC. Označme X bod na polpriamke CA taký, že kružnica opísaná BMX sa dotýka AC. Analogicky zostrojme bod Y na polpriamke BA tak, že kružnica opísaná CMY se dotýka AB. Ďalej označme S stred toho oblúku BC kružnice opísanej ABC, ktorý neobsahuje A. Dokážte, že body X, Y, S ležia na jednej priamke.

Úloha A6. Majme strom s množinou vrcholov V a množinou hrán E. Každému vrcholu $v \in V$ je priradené reálne číslo x_v. Dokážte, že

$$\sqrt{|E|} \sum_{v \in V} x_v^2 \geq 2 \sum_{\{u,v\} \in E} x_u x_v.$$

Úloha C6. Majme multigraf[1] na n vrcholoch. Každá hrana je ofarbená jednou z n farieb a hrany každej z farieb tvoria cyklus nepárnej dĺžky. Ukážte, že existuje cyklus nepárnej dĺžky, v ktorom má každá hrana inú farbu.

[1] *Multigraf* je graf, v ktorom smie viesť viac hrán medzi jednou dvojicou vrcholov.