Zadání 7. série

Termín odeslání: 22. únor 2016

Adresa: *Korespondenční seminář iKS*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
Czech republic

Úloha C7. V kruhu sedí n vězňů. Kouzelník si u každého hodí spravedlivou mincí a podle toho mu dá červený nebo modrý klobouk. Každý vězeň vidí klobouky ostatních, ale ne ten svůj. Poté každý řekne reálné číslo (všichni najednou). Vyhrají právě tehdy, když bude součet jejich čísel kladný a červených klobouků bude sudý počet, nebo pokud bude součet jejich čísel záporný a červených klobouků bude lichý počet. Mohou si ovšem předem domluvit strategii. Strategie vždy funguje tak, že se vězeň podívá, kdo má jaký klobouk, a podle toho jednoznačně odpoví. (Každý vězeň má svou vlastní strategii.) V závislosti na n nalezněte nevětší možné p, pro které existuje strategie taková, že vězni vyhrají s pravděpodobností p.

Úloha G7. V rovině leží trojúhelník ABC. Nechť l_B je přímka, která prochází body dotyku kružnice B-připsané s přímkami BA a BC. Přímky l_A a l_C definujeme analogicky. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníka určeného přímkami l_A, l_B, l_C. Ukažte, že O je průsečík výšek trojúhelníka ABC.

Úloha N7. Označme si jako $P(k)$ počet uspořádených čtveřic (x, y, z, w) celých čísel, která v absolutní hodnotě nepřesahují 2016^{2016} a přitom platí

$$x^3 + y^3 + z^2 - w^2 = k.$$

Ukažte, že $P(0) > P(1)$.

Úloha A7. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že kdykoliv x, y, z jsou reálná čísla splňující $x^3 + f(y)x + f(z) = 0$, pak $f(x)^3 + yf(x) + z = 0$.