Riešenia 6. série

Úloha C6. *Pravidelný n-uholník sme rozdelili pomocou uhlopriečok na $n-2$ trojuholníkov. Koľko najviac z nich môže byť rôznych (nezhodných[1])?*

Riešenie. Pro $n = 3$ je odpověď zřejmě jedna. Dále $n > 3$.

Nejprve si všimněme, že aby bylo trojúhelníků $n-2$, úhlopříčky se nesmí protínat. Když totiž přidáváme úhlopříčky postupně, tak každá přidá tolik oblastí, kolika oblastmi prochází. Takže když má po přidání $n-3$ úhlopříček být $n-2$ trojúhelníků, tak každá úhlopříčka musela přidat jen jednu oblast a tedy nesměla protínat žádnou jinou úhlopříčku.

Nyní víme, že každý trojúhelník má vrcholy ve vrcholech našeho n-úhelníku. Takovému trojúhelníku přiřadíme trojici (a, b, c), kde tato čísla jsou počty hran na obvodu n-úhelníku mezi jednotlivými vrcholy a $a \leq b \leq c$. Nejprve si uvědomme, že mají-li dva trojúhelníky přiřazenou stejnou trojici, tak jsou shodné. To proto, že počet hran mezi vrcholy určuje délku strany trojúhelníka, takže jsou trojúhelníky shodné podle *sss*. Navíc vždy platí $a+b+c = n$ (počet hran na obvodu n-úhelníku) a tak různé trojice odpovídají neshodným trojúhelníkům (kvůli stejnému součtu se musí lišit buď v nejmenším nebo v největším čísle a tedy nejkratší nebo nejdelší strana bude různě dlouhá).

Nyní si vytvořme graf tak, že za každý trojúhelník vytvoříme vrchol a vrcholy spojíme hranou, pokud spolu trojúhelníky sousedí úhlopříčkou. Z indukce (postupným přidáváním úhlopříček) zřejmě plyne, že tento graf je strom (přidaná úhlopříčka rozdělí jeden vrchol na dva a dá mezi ně hranu – tím zůstane graf souvislý a má stále o jedna méně hran než vrcholů).

Označme si a_1, a_2, a_3 počty vrcholů se stupni 1, 2, 3 a příslušným trojúhelníkům budeme říkat *rohové*, *hranové* a *vnitřní*. Žádný trojúhelník určitě nemá větší stupeň než tři, protože nemůže sousedit s více než třemi trojúhelníky. Takže $a_1 + a_2 + a_3 = n-2$. Dále platí, že $a_1 = a_3 + 2$, což snadno nahlédneme (každý strom má alespoň dva listy a každé rozvětvení list přidá) a také snadno dokážeme tak, že součet stupňů vrcholů je dvojnásobek počtu hran, takže $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 2(n-3)$ neboli

$$a_1 - a_3 = 2(a_1 + a_2 + a_3) - (a_1 + 2a_2 + 3a_3) = 2.$$

Nyní si stačí uvědomit, že *rohové* trojúhelníky mají trojice $(1, 1, n-2)$, a tak jsou všechny shodné a *hranové* trojúhelníky mají trojice $(1, a, n-1-a)$, kde $a \geq 2$ a $a \leq n-1-a$, což nám dává maximálně $m_2 = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1$ neshodných trojúhelníků. Maximálně je tak neshodných trojúhelníků t nejvíce

$$\begin{aligned} t \leq 1 + \min(m_2, a_2) + a_3 \quad &\leq \quad \left\lfloor 1 + \left(\frac{m_2 + a_2}{2}\right) + \left(\frac{a_3}{2} + \frac{a_1 - 2}{2}\right) \right\rfloor && (1) \\ &= \quad \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} + \frac{m_2}{2} \right\rfloor && (2) \\ &= \quad \left\lfloor \frac{n - 3 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3n-7}{4} \right\rfloor, && (3) \end{aligned}$$

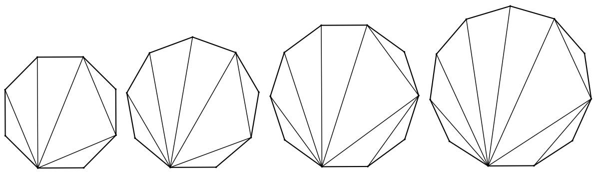
kde poslední rovnost ověříme postupným dosazením $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$.

Zbývá udělat konstrukci, kde tohoto počtu trojúhelníků dosáhneme. Stačí, aby v obou nerovnostech v (1) nastaly rovnosti. Tedy musíme mít alespoň jeden trojúhelník $(1, 1, n-2)$ (to víme, že bude platit určitě), dále $a_2 = m_2$ nebo $a_2 = m_2 + 1$ (to nám pak přidá jednu polovinu na pravé straně (1), která zmizí v dolní celé části) a m_2 z těchto trojúhelníků musí být navzájem různých a konečně všechny „vnitřní“ trojúhelníky musí být různé. Pak bude počet neshodných trojúhelníků přesně ten požadovaný.

[1] Áno aj preklopené, t.j. osovo súmerné trojuholníky sú zhodné

Tak tedy konstrukce. Nejprve spojme vrchol 1 úhlopříčkami s vrcholy $3, 4, \ldots, 3 + m_2$. To nám postupně vytvoří trojúhelníky s trojicemi $(1, 1, n-2), (1, 2, n-3), (1, 3, n-4), \ldots, (1, m_2 + 1, n-2-m_2)$ (přitom opravdu $m_2+1 \leq n-2-m_2$), čímž jsme dostali jeden trojúhelník rohový a m_2 různých hranových. Stačí tedy, aby ve zbytku vznikl nejvýše jeden hranový trojúhelník a všechny vnitřní trojúhelníky byly různé. Toho dosáhneme například tak, že vrcholy $i = m_2 + 5, m_2 + 7, \ldots, x$ (kde x je buď $n-2$ nebo $n-1$) spojíme vždy s vrcholem $i-2$ a s vrcholem 1. Tím dostaneme vždy jeden rohový trojúhelník a jeden vnitřní trojúhelník $(2, n+1-i, i-3)$ (všimněme si, že opravdu $2 \leq n+1-i \leq i-3$) a tyto vnitřní trojúhelníky jsou všechny různé. Pokud bylo $x = n-2$, spojíme ještě $n-2$ s n, což nám vytvoří navíc jeden rohový a jeden hranový trojúhelník a pokud $x = n-1$ vznikl nám v posledním kroku navíc ještě jeden rohový trojúhelník. V obou případech jsme udělali konstrukci tak, že v (1) nastávají rovnosti a tak jsme dosáhli maximálního možného počtu trojúhelníků.

Pro názornost uveďme ještě obrázek s konstrukcí pro $n = 8, 9, 10, 11$.



Poznámky opravovateľa. Řada řešitelů zapomněla na případ $n = 3$ (všimněte si, že vzoreček v tomto případě dává výsledek 0), za což jsem nakonec nestrhával bod, protože zadání se dá taky vyložit tak, že alespoň jednu úhlopříčku jsme nakreslili. Naopak jsem ale strhával bod za opomenutí faktu, že se úhlopříčky neprotínají. Objevily se chyby ještě v různých drobnostech, jako například při převodu trojúhelníků na trojice (a, b, c) nikdo pořádně neřekl, že trojúhelníky jsou shodné, právě když trojice jsou stejné. Jinak ale všechna řešení postupovala zhruba vzorově, jen někdy více a někdy méně elegantně (některá řešení například rozebírala čtyři případy podle zbytku po dělení čtyřmi).

(Štěpán Šimsa)

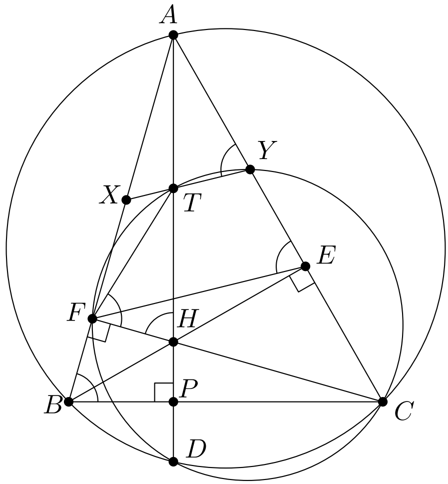
Úloha G6. *V ostrouhlom trojuholníku ABC pretína výška z bodu A opísanú kružnicu k v bode D. Nech výšky z bodov B, C pretínajú strany AC, AB v bodoch E, F. Nech H je ortocentrum a T je stred úsečky AH. Priamka rovnobežná s EF prechádzajúca bodom T pretína AB, AC v bodoch X, Y. Dokážte, že $|\sphericalangle XDF| = |\sphericalangle YDE|$.*

Riešenie.

Nechť P je pata výšky z A na BC. Protože je díky pravým úhlům čtyřúhelník $AFPC$ tětivový, platí díky mocnosti bodu H ke kružnici tomuto čtyřúhelníku opsané rovnost $HA \cdot HP = HF \cdot HC$. Dle známého tvrzení je P středem úsečky HD. Proto $HD \cdot HT = (2HP) \cdot \frac{HA}{2} = HP \cdot HA = HF \cdot HC$. Proto je $TFDC$ tetivový čtyřúhelník. Zároveň platí $\angle TFC = \angle THF = \angle FBP = \angle FEA = \angle TYA = 180^\circ - \angle TYC$, kde jsme využili, že trojúhelník TFH je rovnoramenný (T je střed kružnice nad průměrem AH) a tětivovosti čtyřúhelníků $HPBF$ a $BCEF$ (obojí z pravých úhlů). Z toho plyne, že čtyřúhelník $YTFC$ je tětivový a tedy i pětiúhelník $YTFDC$ je tětivový. Analogicky dostaneme, že pětiúhelník $XTEDB$ je tětivový.

Nyní máme $\angle FDY = \angle FCA = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABE = \angle XDE$, takže $\angle XDF = \angle FDY - \angle XDY = \angle XDE - \angle XDY = \angle YDE$, což jsme měli dokázat.

(Rado Švarc)



Úloha N6. *Pre prirodzené číslo $k > 1$, nech $f(k)$ je počet spôsobov, ako zapísať k ako súčin prirodzených čísel väčších ako 1, pri čom nezáleží na poradí. Napríklad $f(12) = 4$, lebo 12 sa dá rozložiť týmito 4 spôsobmi: 12, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$, $2 \cdot 2 \cdot 3$. Dokážte, že ak n je prirodzené číslo väčšie ako 1 a p je prvočíselný deliteľ n, tak $f(n) \leq \frac{n}{p}$.*

Riešenie. (podľa Michala Beránka)

Uvažujme rozklad čísla n na prvočísla $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$. Chceme ukázať, že $f(n) \leq \frac{n}{p}$ pre ľubovoľný prvočíselný deliteľ p čísla n. Uvedomme si, že hodnota $f(n)$ závisí iba od hodnôt $a_1, a_2, \dots, a_k$, teda je úplne nezávislá od hodnôt $p_1, p_2, \cdots, p_k$.

Preto nám stačí dokázať prípad, ak je pre dané hodnoty $a_1, a_2, \cdots, a_k$ (BUNV $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k$) pravá strana minimálna, čo zrejme nastáva ak $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_k =$ (k-té najmenšie prvočíslo) a $p = p_k$. Inak povedané, stačí nám dokázať

$$f(n) \leq 2^{a_1} 3^{a_2} \cdots (\text{k-té najmenšie prvočíslo})^{a_k - 1}.$$

(Kvôli prehľadnosti pri riešení používajme ďalej značenie prvočísel $p_1, \cdots, p_k$)

Poďme zhora odhadnúť $f(n)$ počet možností na rozklad n na súčin prirodzených čísel, pričom na poradí súčiniteľov nezáleží (zarátanie pár možností, kde na poradí záležať bude, nám vadiť nemusí). Chceme z čísla $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ zostrojiť rozklad na súčinitele. Predstavme si, že máme a_1 kusov prvočísla p_1, a_2 kusov prvočísla p_2, $\cdots$, a_k kusov prvočísa p_k. Rozkladu n na súčinitele zodpovedá rozdelenie týchto kusov prvočísel do skupín takých, že skupiny tvoria prvočíselný rozklad jednotlivých súčiniteľov. Poďme odhadnúť, koľko najviac rozdelení kusov prvočísel do skupín môže vzniknúť.

Ako môžeme uchopiť jednu skupinu? Napríklad ako postupnosť kusov prvočísel v nej. Keďže chceme určiť skupinu jednoznačne, zoberme si ich ako nerastúcu postupnosť. Všimnime si, že v danej postupnosti je každému kusu prvočísla jednoznačne priradené číslo za ním (poslednému je priradená 1) - označím si to ako "nasledovníka"prvočísla. Taktiež, každý kus prvočísla je priradený ako nasledovník najviac raz. Nasledovník je buď rovnaké prvočíslo, menšie prvočíslo alebo 1, prípad rovnakého prvočísla p_k zrejme nemôže nastať práve a_k krát (to by reprezentovalo cyklus v rozdelení kusov prvočísel).

Počet takýchto rozdelení do neklesajúcich postupností vieme zrátať pekne. Totiž ak každému prvočíslu priradíme nasledovníka, potom bude rozdelenie prvočísel do skupín jednoznačne určené. Nasledovníkov budeme priradzovať začínajúc priradzovanie najväčším prvočíslam po najmenšie.

Počet možností, ako vybrať nasledovníka jednému prvočíslu p_k je (k+1). Počet možností, ako vybrať nasledovníka postupne všetkým kusom prvočísel p_k je nanajvýš $(k+1)^{a_k-1}k$ (rozmyslite si, prečo pri postupnom priraďovaní nasledovníkov možno pri poslednom priradzovanom prvočísle p_k prehlásiť, že jeho nasledovník nebude iné p_k). Počet možností, ako vybrať nasledovníka postupne všetkým kusom prvočísel p_{k-1} je nanajvýš $(k)^{a_{k-1}-1}(k-1)$. Počet možností, ako vybrať nasledovníka postupne všetkým kusom prvočísel p_{k-2} je nanajvýš $(k-1)^{a_{k-2}-1}(k-2)$. $\cdots$ Počet možností, ako vybrať nasledovníka postupne všetkým kusom prvočísel p_1 je nanajvýš $2^{a_1-1}1$.

Spolu je to

$$\begin{aligned} f(n) &\le (k+1)^{a_k-1}k\cdot k^{a_{k-1}-1}(k-1)\cdot(k-1)^{a_{k-2}-1}(k-2)\dots 2^{a_1-1}1\\ &= (k+1)^{a_k-1}\cdot k^{a_{k-1}}\cdot(k-1)^{a_{k-2}}\dots 2^{a_1}\\ &\le p_1^{a_1}3^{a_2}\cdots p_k^{a_k-1}, \end{aligned}$$

čo bolo treba dokázať.

Poznámka: pri odhadovaní sme zarátali niektoré možnosti viackrát, ale to nám nevadí, lebo sme robili horný odhad.

(Slavomír Hanzely)

Úloha A6. *Nájdite všetky funkcie $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$, ktoré spĺňajú*

$$f(x^2+y)+1=f(x^2+1)+\frac{f(xy)}{f(x)}$$

pre všetky nenulové reálne x,y také, že $x^2+y\neq 0$.

Riešenie. (podle Mariána Poturnaye) Dosaďme $x=1$ a následně $x=-1$, čímž dostáváme pro všechna $y\neq -1$:

$$f(y+1)+1=f(2)+f(y)/f(1)$$
$$f(y+1)+1=f(2)+f(-y)/f(-1)$$

Odečtením těchto rovnic a využitím faktu, že obor hodnot funkce f neobsahuje nulu, získáme vztah (1):

$$f(y)=\frac{f(1)}{f(-1)}f(-y)$$

, který záměnou y za $-y$ dá

$$f(-y)=\frac{f(1)}{f(-1)}f(y).$$

Zkombinováním těchto dvou rovnic dostáváme $f(-1)^2=f(1)^2$, což nám spolu s (1) dává, že funkce f je buď sudá, nebo lichá. Tyto dva případy rozebereme zvlášť.

Nechť je f sudá funkce. Pak využitím původního vztahu a jeho pozměněním pomocí dosazení $-y$ namísto y dostáváme dvě rovnice:

$$f(x^2+y)+1=f(x^2+1)+\frac{f(xy)}{f(x)}$$

$$f(x^2-y)+1=f(x^2+1)+\frac{f(-xy)}{f(x)}$$

Využitím $f(xy) = f(-xy)$ (plyne ze sudosti) máme:

$$f(x^2 - y) = f(x^2 + y).$$

Zafixujeme-li hodnotu $x^2 + y = k$ tak, aby platilo $x^2 > k > 0$, vztah se změní na

$$f(k - 2y) = f(k)$$

a pro libovolné $y < 0$ bude existovat nějaké x, které ji splňuje. Získáváme tedy rovnost $f(k) = f(l)$ pro všechna $l > k > 0$, což nutně implikuje $f(x) = c$ pro danou konstantu $c \neq 0$ na všech kladných číslech, díky sudosti i na všech záporných. Tato funkce skutečně rovnici vyhovuje a tak má tedy tato větev jediné řešení.

Nechť je f lichá funkce. Dosazením $x = 1$ získáme již jednou odvozený vztah

$$f(y + 1) + 1 = f(2) + f(y)/f(1).$$

Dosadíme-li $y + 1$ namísto y, dostaneme

$$f(y + 2) + 1 = f(2) + \frac{f(y + 1)}{f(1)}.$$

Dosadíme za $f(y + 1)$:

$$f(y + 2) = f(2) - 1 + \frac{f(2) + \frac{f(y)}{f(1)} - 1}{f(1)}$$

$$f(y + 2) = (f(2) - 1)(1 + \frac{1}{f(1)}) + \frac{f(y)}{f(1)^2}$$

Dosazením $y = -1$ do původního vztahu a využitím lichosti máme

$$f(x^2 - 1) + 1 = f(x^2 + 1) - 1.$$

Nyní poslední dva získané poznatky zkombinujeme, dosadíme $y = x^2 - 1$, což nám zajistí $y + 2 = x^2 + 1$.

$$f(x^2 - 1 + 2) = \frac{f(x^2 - 1)}{f(1)^2} + (f(2) - 1)(1 + \frac{1}{f(1)})$$

$$f(x^2 + 1) = \frac{f(x^2 - 1)}{f(1)^2} + (f(2) - 1)(1 + \frac{1}{f(1)})$$

$$f(x^2 - 1) + 2 = \frac{f(x^2 - 1)}{f(1)^2} + (f(2) - 1)(1 + \frac{1}{f(1)})$$

$$f(x^2 - 1)(1 - \frac{1}{f(1)^2}) = (f(2) - 1)(1 + \frac{1}{f(1)}) - 2$$

Ač úpravy vypadají hrozivě, výstup poslední rovnice je snadno uchopitelný - buď platí $f(1)^2 = 1$, nebo je funkce konstantní na intervalu $(-1, 0) \bigcup (0, \infty)$. To druhé nám spolu s lichostí dává výsledek $f(x) = 0$, který je ve sporu se zadáním úlohy. Musí tedy být $f(1)^2 = 1$, odkud ihned vyplývá i

$$(f(2) - 1)(1 + \frac{1}{f(1)}) = 2.$$

Díky $f(1)^2 = 1$ máme buď $f(1) = 1$, nebo $f(1) = -1$. Druhá možnost je spor se vztahem výše, dostáváme tedy $f(1) = 1$ a ze vztahu výše i $f(2) = 2$.

S nově nabytými znalostmi lze upravit dosazení $x = 1$ do původní rovnice na $f(y + 1) = f(y) + 1$ (aditivita jedničky).

Dosazením $y = 2$ do původního vztahu dostáváme

$$f(x^2+2)+1 = f(x^2+1) + \frac{f(2x)}{f(x)}.$$

Díky aditivitě jedničky ($f(x^2+2) = f(x^2+1)+1$) získáváme vztah $2f(x) = f(2x)$ (multiplikativita dvojky).

Dále díky aditivitě jedničky můžeme původní vztah upravit na

$$f(x^2+y) = f(x^2) + \frac{f(xy)}{f(x)}.$$

Pro kladná x dosaďme $\sqrt{x}$ namísto x a ještě vyměňme y za $-y$:

$$f(x+y) = f(x) + \frac{f(y\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

$$f(x-y) = f(x) + \frac{f(-y\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

Sečtením dostaneme

$$f(x+y)+f(x-y) = 2f(x) + \frac{f(-y\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{f(y\sqrt{x})}{\sqrt{x}}.$$

Poslední dva členy se díky lichosti zruší, dále využijeme multiplikativitu dvojky a dostaneme

$$f(x+y)+f(x-y) = f(2x)$$

pro všechna kladná x.

Nyní můžeme substituovat $a = x+y$ a $b = x-y$ (a, b již nemusí být kladné), což nám dá $f(a)+f(b) = f(a+b)$ (aditivita). Díky aditivitě můžeme původní vztah upravit na

$$f(y) = f(x^2+y) - f(x^2) = f(xy)/f(x)$$

, odkud vyplývá $f(x)f(y) = f(xy)$ (multiplikativita).

Funkce aditivní a multiplikativní zároveň jsou jen $f(x) = 0$, což nevyhovuje zadání, nebo $f(x) = x$, což po dosazení zřejmě vyhovuje. (Toto tvrzení je známé, dá se dokázat pomocí hledání vyhovujících funkcí indukcí postupně na celých číslech, racionálních číslech a následně rozšířit na reálná čísla.)

Zadání tedy vyhovují dvě funkce - $f(x) = c$ pro všechna nenulová c a $f(x) = x$.

Poznámky opravovateľa. Gratuluji Mariánu Poturnayovi ke správnému řešení a také Danilu Koževnikovi, který hezky zobecnil původní vztah a také dovedl úlohu ke zdárnému konci. Nepřesnosti v obou řešeních byly lehce odstranitelné, proto jsem za ně nestrhával body. Za zmínku stojí dávat si pozor na vztah $f(x)^2 = f(-x)^2$ pro všechna x, ze kterého láká člověka nesprávně odvodit, že buď $f(x) = f(-x)$ pro všechna x, nebo $f(x) = -f(-x)$ pro všechna x.

(Marian Poljak)