Řešení 3. série

Úloha G3. *V trojúhelníku ABC zvolíme na stranách BC, CA, AB postupně body A_1, B_1, C_1 tak, aby platilo $|AB_1|-|AC_1| = |CA_1|-|CB_1| = |BC_1|-|BA_1|$. Nechť I_a, I_b, I_c jsou postupně středy kružnic vepsaných trojúhelníkům AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C. Ukažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku $I_aI_bI_c$ splývá se středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC.*

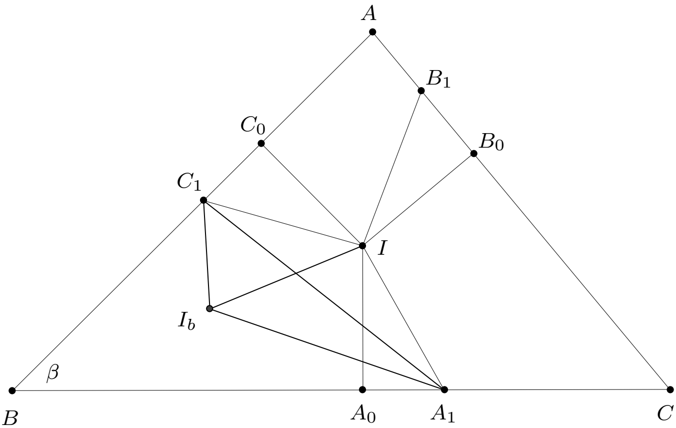
Řešení. Rovnost $|AB_1| - |AC_1| = |CA_1| - |CB_1|$ můžeme přepsat do tvaru

$$|AC| = |AB_1| + |CB_1| = |CA_1| + |AC_1| = |BA| + |BC| - (|BA_1| + |BC_1|)$$
$$|BA_1| + |BC_1| = |BA| + |BC| - |AC|$$

Označme A_0, B_0, C_0 postupně body dotyku kružnice vepsané trojúhelníka ABC postupně se stranami BC, CA, AB a I její střed. Body A_0, B_0, C_0 splňují tu samou vlastnost jako body A_1, B_1, C_1, totiž

$$|AB_0| - |AC_0| = |CA_0| - |CB_0| = |BC_0| - |BA_0| = 0.$$

Z toho plyne, že lze stejným způsobem vyjádřit $|BA_0|+|BC_0| = |BA_1|+|BC_1|$, takže $|A_0A_1| = |C_0C_1|$ a bod A_1 leží uvnitř úsečky BA_0 právě tehdy, když bod C_1 leží uvnitř úsečky C_0A.



Označme $\beta = |\angle ABC|$. Pak $|\angle A_0IC_0| = 360° - \beta - 90° - 90° = 180° - \beta$. Ukážeme, že stejnou velikost má i úhel $|\angle A_1IC_1|$. Jsou-li body A_1, C_1 přímo rovny bodům A_0, C_0, máme již velikost úhlu spočítanou. Předpokládejme, že tomu tak není. Pak jsou trojúhelníky IA_0A_1 a IC_0C_1 shodné, protože $|IA_0| = |IC_0|$, $|A_0A_1| = |C_0C_1|$ a $|\angle IA_0A_1| = |\angle IC_0C_1| = 90°$. Pokud A_1 leží uvnitř úsečky BA_0, můžeme spočítat

$$|\angle A_1IC_1| = |\angle A_0IC_0| + |\angle C_0IC_1| - |\angle A_0IA_1|.$$

V opačném případě

$$|\angle A_1IC_1| = |\angle A_0IC_0| + |\angle A_0IA_1| - |\angle C_0IC_1|,$$

nicméně v obou případech $|\angle A_1IC_1| = |\angle A_0IC_0| = 180° - \beta$.

Dále platí $IA_1 = IC_1$ – to plyne ze shodnosti trojúhelníků IA_0A_1, IC_0C_1 nebo přímo, jsou-li tyto trojúhelníky degenerované. Body A_1, C_1 tedy leží na kružnici se středem I a středový úhel příslušející delšímu oblouku mezi nimi je $180^\circ + \beta$. Ukážeme, že I_b leží na této kružnici, Můžeme spočítat

$$|\angle A_1 I_b C_1| = 180^\circ - |\angle I_b A_1 C_1| - |\angle I_b C_1 A_1| = 180^\circ - \frac{1}{2}(|\angle BA_1C_1| + |\angle BC_1A_1|) =$$

$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \beta) = 90^\circ + \frac{\beta}{2}.$$

Bod I_b vidí úsečku A_1C_1 pod polovičním úhlem oproti středovému úhlu, takže $|II_b| = |IA_1|$. Cyklickou obměnou bychom ukázali, že i $|II_a| = |IC_1| = |IA_1|$ a $|II_c| = |IB_1| = |IA_1|$. Bod I je tak středem kružnice vepsané trojúhelníku $I_aI_bI_c$.

Poznámky opravujícího. Ačkoli byla úloha jednoduchá, ne všichni obdrželi plné bodové skóre. Řešitelé často zapomínali rozlišit jednotlivé konfigurace, či se tvářili, že něco je „vidět z obrázku“, což je ošemetná formulace, protože obrázek je jednak nepřesný a především v geometrii typicky zobrazuje jen jednu z nekonečně mnoha různých poloh bodů. *(Mirek Olšák)*

Úloha C3. *Je možné přiřadit nenulová reálná čísla bodům roviny tak, aby součet hodnot ve vrcholech každého pravidelného 2015-úhelníku byl nulový?*

Řešení. Takové očíslování neexistuje. Pro spor si vezmeme libovolný 2015-ti úhelník, vybereme jeden bod a nazveme jej A_0^0. Celkem 2014-krát provedeme rotaci, v i-tém kroku, vždy o $\frac{i}{2015} \cdot 360^\circ$.Tento 2015-úhelník bude tvořen body $A_0^i, A_1^i, A_2^i \dots A_{2014}^i$. Bod A_0^0 se nám v každé rotaci zobrazí sám na sebe, tedy $A_0^i = A_0^0$. Potom body $A_j^0, A_j^1, \dots A_j^{2014}$ tvoří pravidelný 2015-ti úhelník pro každé nenulové i, protože jsme kolem středu rotace A_0^0 rotovali bod A_j^i o $\frac{i}{2015} \cdot 360^\circ$. Nyní mohu spočítat hodnotu vrcholu A_0^0.

$$2015 A_0^0 = \sum_{j=0}^{2015} \sum_{i=0}^{2015} A_i^j - \sum_{k=1}^{2015} \sum_{l=0}^{2015} A_l^k$$

Levá suma je součet hodnot ve všech 2015-ti úhelnících. Pravá suma je součet hodnot ve všech 2015-ti úhelnících, jejichž středem je A_0^0. Jelikož však součet hodnot bodů v 2015-ti úhelníku je 0, potom $A_0^0 = 0$ a dostali jsme spor.

Poznámky opravujícího. Úloha se ukázala jako jednoduchá, většina z vás s ní neměla moc problémů. Všichni se dobrali k výsledku podobnou cestou. *(Kuba Svoboda)*

Úloha A3. *Patrik si napsal reálný monický polynom stupně 2014, vyhodnotil jej v 2015 různých celočíselných bodech, vzal z nich absolutní hodnoty a vybral tu největší. Polynom i body volil tak, aby výsledná hodnota byla nejnižší možná. Kolik mu vyšlo?*

Řešení. Na tuto úlohu se nakonec jako nejvhodnější zbraň ukázal Lagrangeův interpolačním polynom: Každý polynom stupně nejvýše n je jednoznačně určen hodnotami na $n+1$ různých bodech. Jinak řečeno pokud mi nepřítel zadá po dvou různá čísla x_0 až x_n a k nim nějaké hodnoty y_0 až y_n, pak existuje právě jeden polynom P stupně menšího než n, takový že $y_i = P(x_i)$ pro každé i od 0 do n. Snadno si rozmyslíme, že tento polynom musí být jediný, a pak se snadno (dosazením) přesvědčíme, že tento polynom musí tedy být dán vztahem

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Vyzbrojeni tímto vzoreček se úloha již brzy vzdá. Z něj spočtením vedoucího koeficientu snadno přijdeme na to, že pro monický polynom platí

$$\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j} = 1.$$

Nechť jsou tedy x_0 až x_n nějaká celá čísla seřazená vzestupně. Pozorování - $\mid x_k - x_l \mid \geq \mid k-l \mid$ pro všechna přípustná k a l. S využitím tohoto pozorování a trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$1 \leq \sum_{i=0}^{n} \mid y_i \mid \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{1}{\mid x_i - x_j \mid} \leq \sum_{i=0}^{n} \mid y_i \mid \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{1}{\mid i-j \mid} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\mid y_i \mid}{n!}\binom{n}{i}.$$

Nyní připusťme, že $\max_{k\in\{0..n\}} \mid y_k \mid < \frac{n!}{2^n}$. Pak máme

$$1 \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{\mid y_i \mid}{n!}\binom{n}{i} < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{i} = 1,$$

kde jsme v posledním kroku využili známé identity o dvojím počítání všech podmnožin množiny o n prvcích. Dostáváme tedy spor a alespoň pro jedno k platí, že $\mid y_k \mid \geq \frac{n!}{2^n}$. Nyní dokážeme, že tato hodnota je dosažitelná. K tomu položme $x_k = k$ a $y_k = (-1)^k \frac{n!}{2^n}$. Pak je zjevně největší hodnota absolutních hodnot y_k právě $\frac{n!}{2^n}$ a navíc

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{n!}{2^n} \prod_{j=0,j\neq i}^{n} \frac{1}{i-j} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{1}{2^n}\binom{n}{i}(-1)^i = \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 1,$$

kde jsme opět využili známé identity. Výsledný polynom tedy bude monický. Úloha byla zadaná pro $n = 2014$ a tedy minimum je $\frac{2014!}{2^{2014}}$.

Poznámky opravujícího. Úlohu poslalo pět z Vás a čtyři ji víceméně úspěšně zdolalo. Vzorové řešení bylo volně převzato od *Danila Koževnikova*, jedno další řešení využívalo Lagrangeho a dvě zbylá pak diference. Chválím řešitele, kteří používají TEX a žádám ty, co píší rukou, aby psali trochu čitelněji a na linkovaný papír (hodí se víc a to i v případě, že řešení doprovází obrázky). *(Michael „Majkl“ Bílý)*

Úloha N3. *Patrik miluje prvočísla. Některá miluje hodně, jiná více, ale má několik prvočísel, která miluje nejvíce. Všechna tato prvočísla si schoval do konečné neprázdné množiny P. K narozeninám by si od vás přál takové přirozené číslo n, které lze zapsat jako $a^p + b^p$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{N}$ (kde p je prvočíslo) právě tehdy, když $p \in P$. Rozhodněte, zda můžete jeho přání splnit pro každou množinu P.*

Řešení. Ano, je to možné. Označme si jako t součin všech prvočísel z P. Ukážeme, že číslo 2^{t+1} splňuje podmínky ze zadání.

Zaprvé, pokud $p \in P$, pak volbou $a = b = 2^{\frac{t}{p}}$ (což jsou přirozená čísla, protože $p \mid t$) dostáváme

$$a^p + b^p = 2^t + 2^t = 2^{t+1}.$$

Nyní nechť pro spor pro prvočíslo $q \notin P$ existují přirozená a a b taková, že $a^q + b^q = 2^{t+1}$. Rozebereme dvě možnosti.

Pokud $q = 2$, tak všechna prvočísla v P jsou lichá, tudíž $t + 1 = 2s$ pro nějaké přirozené s. Proto $a^2 + b^2 = 4^s$. Nechť 2^k je nejvyšší mocnina dvojky, která dělí a i b. Potom když $a = 2^k c$ a $b = 2^k d$ tak alespoň jedno z dvojice c, d je liché. Rovnost upravíme na $c^2 + d^2 = 4^{s-k}$. Protože c i d jsou přirozená čísla, je levá strana rovna alespoň dvěma, takže $s - k > 0$. Potom je pravá strana dělitelná čtyřmi, takže $4|c^2+d^2$. Ovšem protože alespoň jedno z c, d je liché, dává c^2+d^2 po dělení čtyřmi zbytek 1 nebo 2, což je spor.

Pokud $q>2$, tak q je liché. Opět nechť 2^k je nejvyšší mocnina dvojky, která dělí a i b a nechť $a=2^kc$ a $b=2^kd$. Z toho dostáváme $c^q+d^q=2^{t+1-qk}$. Protože c a d jsou přirozená čísla, je levá strana alespoň dva, takže $t+1-qk\geq 1$. Z toho plyne, že c^q+d^q je sudé, a protože maximálně jedno z c, d může být sudé, musí c i d být liché. Nyní z lichosti q platí

$$2^{t+1-qk}=c^q+d^q=(c+q)(c^{q-1}-c^{q-2}d+\cdots+d^{q-1}).$$

Z toho plyne, že $c^{q-1}-c^{q-2}d+\cdots+d^{q-1}$ je mocninou dvojky. Ale toto číslo je součtem q lichých čísel a proto je samo liché. Proto se jedná o jedničku. Potom ovšem $c^q+d^q=c+d$, takže z $q>2$, $c\geq 1$a $d\geq 1$ plyne $c=d=1$. Takže $2^{t+1-qk}=2$, neboli $t=qk$. Z toho ovšem plyne $q\mid t$, což implikuje, že $q\in P$, což je spor. Tímto jsme hotovi.

Poznámky opravujícího. Úlohu vyřešilipouze dva řešitelé, oba postupem kopírujícím vzorový. Přitom úoha nebyla zas až tak těžká. Po správném tipnutí výsledku už se úloha stala pouze standartní úlohou na práci s mocninami a vzorci, která nepotřebovala žádné pokročilé techniky nebo složité triky. *(Radovan „Rado“ Švarc)*