Riešenia 4. série

Úloha C4. *Je daných päť päťstoprvkových podmnožín množiny* $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. *Aké je najväčší* m *také, že medzi nimi nutne nájdeme dve, ktorých prienik tvorí aspoň* m *prvkov?*

Riešenie. Ukážeme, že z každých 5 podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, 1000\}$ má prienik aspoň 200 prvkov.

Najskôr ukážeme konštrukciu takých množín, kde prienik každej dvojice, a teda aj najväčší prienik, má 200 prvkov. Rozdeľme si prirodzené čísla do 1000 do 10 disjunktných stoprvkových množín $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$, napríklad podľa ich poslednej cifry. Našich 5 množín bude

$$
\begin{aligned}
A_1 &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5,\\
A_2 &= B_1 \cup B_2 \cup B_6 \cup B_7 \cup B_8,\\
A_3 &= B_1 \cup B_5 \cup B_6 \cup B_9 \cup B_{10},\\
A_4 &= B_2 \cup B_4 \cup B_7 \cup B_9 \cup B_{10},\\
A_5 &= B_3 \cup B_5 \cup B_7 \cup B_8 \cup B_9.
\end{aligned}
$$

Ľahko overíme, že každá z nich má 500 prvkov a každé dve majú v zápise spoločné práve dve z množín $B_1, B_2, \ldots, B_{10}$, teda ich prienik má 200 prvkov. Ostáva dokázať, že nevieme nájsť také množiny, kde by najväčší prienik dvojice mal menej ako 200 prvkov.

Označme d_0 až d_5 počty čísel, ktoré sú postupne v 0, 1, 2, 3, 4 a 5 našich podmnožinách. Potom vieme, že

$$d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 = 1000, \tag{1}$$

pretože máme 1000 čísel a

$$d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 = 2500, \tag{2}$$

pretože je to súčet počtov prvkov všetkých podmnožín sčítaný cez všetky čísla (podľa násobnosti ich výskytov), a ten je $5 \cdot 500 = 2500$.

Ďalej nám platí, že súčet prienikov všetkých dvojíc podmnožín je $s = d_2 + 3d_3 + 6d_4 + 10d_5$, pretože ak sa číslo nachádza v i podmnožinách, tieto tvoria $i(i-1)/2$ dvojíc a toto číslo je v prieniku každej z nich. Teraz sa stačí už len trochu pohrať so sčítaním a odčítaním rovností. Odčítaním trojnásobku (1) od dvojnásobku (2) dostaneme

$$
\begin{aligned}
2(d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5) - 3(d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5) &= 2 \cdot 2500 - 3 \cdot 1000,\\
-3d_0 - d_1 + d_2 + 3d_3 + 5d_4 + 7d_5 &= 2000,\\
s = d_2 + 3d_3 + 6d_4 + 10d_5 \geq -3d_0 - d_1 + d_2 + 3d_3 + 5d_4 + 7d_5 &= 2000.
\end{aligned}
$$

Súčet veľkostí prienikov všetkých 10 dvojíc je aspoň 2000, a teda niektorá dvojica má prienik aspoň 200 prvkov (inak by súčet vyšiel menší), čo bolo treba dokázať. *(Michal Staník)*

Úloha G4. *Nech* ABC *je ostrouhlý trojuholník s opísanou kružnicou* ω. *Pätu výšky z vrcholu* A *označme* H. *Ďalej nech* P *a* Q *sú body na* ω *také, že* $|PA| = |PH|$ *a* $|QA| = |QH|$. *Dotyčnica k* ω *z bodu* P *pretína priamky* AC *a* AB *po rade v bodoch* E_1 *a* F_1, *dotyčnica k* ω *z* Q *pretína priamky* AC *a* AB *po rade v bodoch* E_2 *a* F_2. *Dokážte, že opísané kružnice trojuholníkom* AE_1F_1 *a* AE_2F_2 *majú rovnaký polomer a priamka spájajúca ich stredy je rovnobežná s dotyčnicou k* ω *z bodu* A.

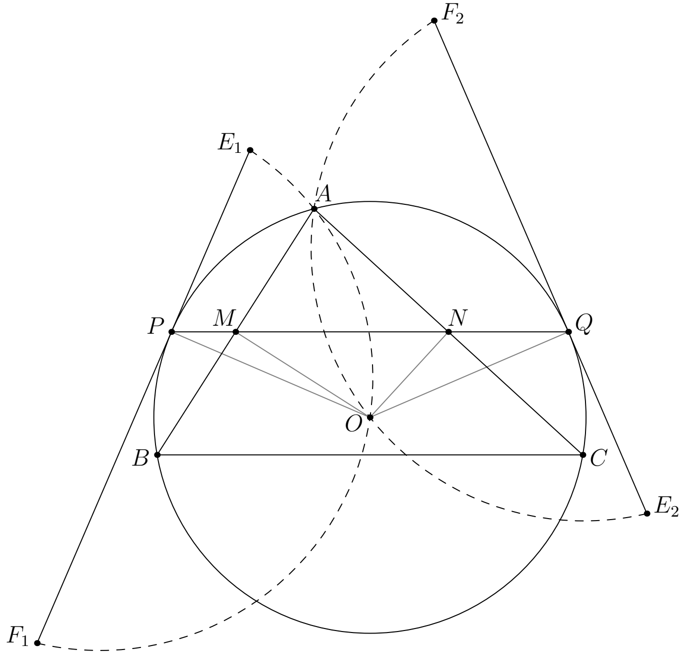
Riešenie. Označme středy stran AB a AC po řadě M, N, střed ω označme O. Protože jsou AHP a AHQ rovnoramenné trojúhelníky a $AH \perp BC$, převádí stejnolehlost s koeficientem 2 a středem A body P a Q na přímku BC. Ta samá stejnolehlost ale převádí i body M a N na přímku BC, tedy P, M, N a Q leží na přímce.

Předpokládejme, že platí $|E_1F_1| = |E_2F_2|$ a že čtveřice bodů A, E_1, F_1, O a A, E_2, F_2, O leží na jedné kružnici. Potom ze sinové věty dostáváme pro hledané poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům AE_1F_1 a AE_2F_2 rovnost

$$R_{\triangle AE_1F_1} = \frac{|E_1F_1|}{2\sin(\angle E_1AF_1)} = \frac{|E_2F_2|}{2\sin(\angle E_2AF_2)} = R_{\triangle AE_2F_2},$$

z níž plyne první dokazované tvrzení. Dále pak AO je chordálou kružnic opsaných trojúhelníkům AE_1F_1 a AE_2F_2, tedy je zároveň kolmá na spojnici jejich středů a na tečnu k ω vedenou z A. Z toho pak plyne druhé dokazované tvrzení.

Ukážeme si poctivé úhlící řešení a několik triků, kterými se úloha (nebo alespoň její část) dala zdolat.



Úhlící řešení. Úhly $\angle F_1MO$ a $\angle F_1PO$ jsou pravé, jelikož F_1P je tečna a MO je osa strany. Z toho dotstáváme, že čtyřúhelník F_1OMP (a analogicky i čtyřúhelník F_2MOQ) je tětivový. Tudíž máme $\angle OF_1P = \angle OMQ = \angle OF_2Q$. Trojúhelníky F_1PO a F_2QO jsou tedy shodné, jelikož jsou pravoúhlé, mají stejný úhel u F_1 a F_2 a $|OP| = |OQ| = R$. Proto platí, že $|F_1P| = |F_2Q|$. Analogicky můžeme ukázat i $|E_1P| = |E_2Q|$, tedy celkově

$$|E_1F_1| = |F_1P| + |E_1P| = |F_2Q| + |E_2Q| = |E_2F_2|.$$

Nyní dokážeme, že O leží na obou kružnicích opsaných. Znovu přitom použijeme, že body E_1, P, O, N a F_1, P, M, O leží na jedné kružnici. Počítejme:

$$\angle F_1OE_1 = \angle F_1OP + \angle POE_1 = \angle F_1MP + \angle PNE_1 = \angle AMN + \angle MNA = \angle F_1AE_1.$$

Tedy skutečně čtyřúhelník F_1E_1AO je tětivový. Analogicky pak i čtyřúhelník F_2AOE_2 je tětivový.

Tětivovost přes Simsonovu přímku. Všimneme si, že body P, M, N jsou po řadě kolmé projekce bodu O po řadě na přímky E_1F_1, AF_1 a AE_1. To už nutně podle tvrzení o Simsonově přímce znamená, že O leží na kružnici opsané trojúhelníku AE_1F_1. Analogicky pak i AOE_2F_2 je tětivový.

Shodnost délek přes projektivní geometrii (podle Vaška Janáčka). Označme X průsečík přímek E_1F_1 a E_2F_2 a p rovnoběžku s AB vedenou bodem X.

Nejprve ukážeme, že p neprotne ω. Nechť je BÚNO AB vodorovná a A leží nalevo od B. Jelikož je $\triangle ABC$ ostroúhlý, leží X vlevo dole od A. Opět z ostroúhlosti nemá ω body vlevo dole od A, tedy jediný možný průsečík musí ležet napravo od X. Tam se ale p nachází v opačné polorovině než ω vzhledem k přímce E_1F_1.

Tím pádem můžeme uvažovat kolineaci, která zobrazí p na nevlastní, zachová ω a poměry na AB[1]. Po kolineaci pak musí platit $E_1'F_1' \parallel E_2'F_2'$, tedy $P'Q'$ je průměr ω.

Jelikož se zachovaly poměry na AB, musí i po kolineaci platit $|A'M'| = |B'M'|$. Pro konkrétní volbu A' ale máme pouze dvě možná B', pro která je předchozí rovnost splněna – obraz A v osové souměrnosti podle $P'Q'$ a obraz A ve středové souměrnosti podle O. V prvním případě ale body F_1' a F_2' splývají v jeden nevlastní bod. To znamená, že musely být stejné už před kolineací, což jistě není pravda.

Ve druhém případě je $A'B'$ průměrem ω. Poté ze symetrie $|F_2'A'| = |F_1'B'|$. Jelikož se na AB zachovaly poměry, musí rovnost platit i před kolineací. Použitím mocnosti k ω z F_1 a F_2 tedy dostáváme

$$|F_2Q|^2 = |F_2A|\cdot|F_2B| = |F_2A|\cdot(|F_2A|+|AB|) = |F_1B|\cdot(|F_1B|+|AB|) = |F_1B|\cdot|F_1A| = |F_1P|^2.$$

Tedy jsme dostali $|F_2Q| = |F_1P|$ a podobně jako v prvním řešení odvodíme $|E_1F_1| = |E_2F_2|$.

Řešení přes spirální podobnost (podle Matěje Hanuse). Stejně jako v prvním řešení dostaneme, že čtyřúhelníky F_1OMP a F_2MOQ jsou tětivové. Pak podle tvrzení o středu spirální podobnosti je O středem spirální podobnosti zobrazující PQ na F_1F_2. Analogicky pak odvodíme, že O je také středem spirální podobnosti zobrazující E_1E_2 na PQ.

Trojúhelník OPQ je rovnoramenný, tedy i trojúhelníky OE_1E_2 a OF_1F_2 jsou rovnoramenné. Navíc složením dvou spirálních podobností se stejným středem je zase spirální podobnost se stejným středem, a tedy O je taky středem spirální podobnosti zobrazující E_1E_2 na F_1F_2. Znovu podle tvrzení o středu spirální posloupnosti dostáváme, že O musí ležet na kružnici opsané trojúhelníkům AE_1F_1 a AE_2F_2.

Spirální podobnost chodí po dvou, tedy v O má střed i ta, co převádí E_1F_1 na E_2F_2. Jelikož $|OE_1| = |OE_2|$, musí tato spirální podobnost být rotací. Ta na sebe shodně zobrazí i kružnice opsané trojúhelníkům SE_1F_1 a SE_2F_2, které tak musí být shodné.

Poznámky opravovateľa. Úloha se dala řešit mnoha různými způsoby a obzvláště chválím řešitele, co přišli s hezkými řešeními. Zejména pak přišla dvě řešení používající projektivní geometrii. Nebojte se ji tedy použít na IMO, jde to. *(Pavel Hudec)*

Úloha N4. *Nájdite všetky $m, n \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí*

$$2^n + (n - \varphi(n) - 1)! = n^m + 1,$$

kde $\varphi(n)$ značí Eulerovu funkciu čísla n, teda počet prirodzených čísel menších než n nesúdeliteľných s n.

[1] Že to skutečně můžeme udělat, si přečti v prvním dílu seriálu o projektivní geometrii dostupném na `https://prase.cz/commentary/C/serie1s/uvod1s.pdf`.

Riešenie. Pokud je n prvočíslo, potom se rovnice přepíše na $2^n = n^m$, proto n musí být sudé a vyjde jediné řešení: $m = 2$, $n = 2$.

Pokud je n druhou mocninou nějakého prvočísla, nazvěme ho p, pak je n soudělné s p čísly $p, 2p, \dots, (p-1)p$, tedy $n - \varphi(n) - 1 = n - (n-p) - 1 = p - 1$ a rovnice se zjednoduší na

$$2^{p^2} + (p-1)! = p^{2m} + 1.$$

Pokud $p = 2$, máme

$$16 + 1 = 2^{2m} + 1,$$

tedy $n = 4$, $m = 2$.

Jinak je p liché a na rovnici se podíváme modulo 4.

$$(p-1)! \equiv 2 \pmod 4,$$

což neplatí, pokud je $p \geq 4$, takže musí být $p = 3$. Jenže to by

$$2^9 + 2 = 9^m + 1,$$

což zase nefunguje.

Poslední případ je, když n ve svém provočíselném rozkladu obsahuje více různých prvočísel. Třeba p a q, kde q je nejmenší prvočíselný dělitel n. Pak je ale n soudělné s $p, 2p, \dots, (q-1)p, q$, takže těch čísel je aspoň q, a proto $n - \varphi(n) - 1 \geq q$. Když se na rovnici podíváme modulo q, dostaneme

$$2^n = 1 \pmod q,$$

takže $q \neq 2$ a můžeme psát

$$q \mid 2^n - 1.$$

Zároveň ale za malé Fermatovy věty platí

$$q \mid 2^{q-1} - 1.$$

Řád prvku 2 mod q tedy dělí obě čísla n a $q-1$, přitom ale q určitě nedělí $1 = 2^1 - 1$, takže tento řád je větší než 1. Z toho ale vidíme, že n a $q-1$ jsou soudělné, což je spor s tím, že q je nejmenší prvočíselný dělitel n. *(Vašek Voráček)*

Úloha A4. *Organizátori iKSka sa rozhodli do tejto série vymyslieť funkcionálnu rovnicu. Radi by vyrobili takú funkcionálnu rovnicu, ktorá má práve jedno riešenie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a pre ktorú navyše platí, že f má za obor hodnôt $\mathbb{Z}$. Zatiaľ sa im však nepodarilo žiadnu vymyslieť, preto sa obrátili na vás. Existuje taká funkcionálna rovnica?*

(Funkcionálna rovnica vyzerá tak, ako by ste čakali - rovnica, v ktorej sa vyskytuje nejaké násobenie, sčítanie, odčítanie a vkladanie do f, či už premenných alebo výrazov.

Formálnejšie: Funkcionálna rovnica je rovnica tvaru $E = 0$, kde E je funkcionálny výraz. Medzi funkcionálne výrazy patrí ľubovoľná reálna konštanta a ľubovoľná premenná z množiny $\{x_1, x_2, \dots\}$. Navyše, ak sú V a W funkcionálne výrazy, potom sú funkcionálnymi výrazmi aj $V + W$, $V - W$, $V \cdot W$ a $f(V)$. Žiadny výraz, ktorý sa nedá vyrobiť konečnou aplikáciou týchto pravidiel, funkcionálnym výrazom nie je. Riešením funkcionálnej rovnice je potom ľubovoľná funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taká, že pre ľubovoľnú voľbu reálnych premenných $x_1, x_2, \dots$ je rovnica splnená.)

Riešenie. Ukážeme, že takovou rovnici skutečně orgové vymyslet mohli.

Jednoduše vidíme, že

$$f(-x^2)^2 + \left(f(x+3) + f(x+2) - f(x+1) - f(x)\right)^2 (x+2)^2 + (f(1) - 1)^2$$

je funkcionální výraz. Podívejme se, jak vypadá řešení rovnice

$$f(-x^2)^2 + \left(f(x+3) + f(x+2) - f(x+1) - f(x)\right)^2 (x+2)^2 + (f(1) - 1)^2 = 0.$$

Tato rovnice vlastně musí splňovat, že $f(x) = 0$ pro každé $x \leq 0$, dále

$$f(x + 3) + f(x + 2) - f(x + 1) - f(x) = 0$$

pro každé $x \neq -2$ a nakonec $f(1) = 1$. Díky tomu, že $f(x) = 0$ pro každé reálné $x \leq 0$ a tomu, že pro každé $x \neq -2$ je

$$f(x + 3) = -f(x + 2) + f(x + 1) + f(x),$$

vidíme, že pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ je $f(x) = 0$. Zbývá nám rozebrat, jak to vypadá na celých číslech. Pro $n \leq 0$ je $f(n) = 0$. Dále $f(1) = 1$. A nakonec pro $n \neq 1$ je

$$f(n) = -f(n - 1) + f(n - 2) + f(n - 3).$$

To znamená, že každé n musí už mít indukčně nadefinovanou hodnotu jednoznačně. A jak vypadá? Inu, f, které lichému $n \geq -1$ přiřazuje $\frac{n+1}{2}$ a sudému $n \geq 0$ přiřadí $\frac{-n}{2}$, skutečně vyhovuje: Pro n rovno -1, 0 a 1 to už víme, dále indukcí. Pokud $n \geq 2$ je sudé, pak

$$f(n) = -f(n - 1) + f(n - 2) + f(n - 3) = -\frac{n}{2} - \frac{n - 2}{2} + \frac{n - 2}{2} = -\frac{n}{2}.$$

Pokud n je liché, pak

$$f(n) = -f(n - 1) + f(n - 2) + f(n - 3) = \frac{n - 1}{2} + \frac{n - 1}{2} - \frac{n - 3}{2} = \frac{n + 1}{2}.$$

V obou případech je to to, co jsme chtěli.

To znamená, že jediné řešení rovnice

$$f(-x^2)^2 + \left(f(x + 3) + f(x + 2) - f(x + 1) - f(x)\right)^2 (x + 2)^2 + (f(1) - 1)^2 = 0$$

je funkce, která necelým číslům přiřazuje nulu, záporným celým také nulu, lichým $n \geq 1$ přiřazuje $\frac{n+1}{2}$ a sudým $n \geq 2$ přiřazuje $\frac{-n}{2}$. Tedy obor hodnot této funkce je určitě podmnožina celých čísel, a dokonce jde o všechna celá čísla, protože $f(0) = 0$, pro kladné n je $f(2n - 1) = n$ a pro záporné n je $f(-2n) = n$. Tedy tato funkcionální rovnice vyhovuje podmínkám ze zadání.

Poznámky opravovateľa. Řešení přišla dvě, ani jedno dobře. Základní idea řešení byla, že pomocí sčítání některých výrazů umím vynutit několik podmínek naráz, a poté si chci vyrobit nějakou rekurentní posloupnost, která mi projde všechna čísla. Vzorové řešení využilo posloupnost $\ldots, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4$, která lze skoro všude (až na jedno místo) vyjádřit rekurentním vztahem $a_{n+3} + a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. *(Rado van Švarc)*