Zadání 3. série

Termín odeslání: 26. září 2022

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha N3. Je dáno kladné celé číslo n. Nalezněte všechny n-tice reálných čísel $(a_1, \dots, a_n)$ splňující soustavu rovnic

$$|a_1 - a_2| = 2 \cdot |a_2 - a_3| = \cdots = (n-1) \cdot |a_{n-1} - a_n| = n \cdot |a_n - a_1|.$$

Úloha C3. V kruhu sedí $2n$ hladových orgů iKSka. Jeden z nich, Aleš, je ze všech nejhladovější. Na začátku je mezi orgy nějak rozděleno m sušenek. Orgové si mohou sušenky posílat podle následujících dvou pravidel:

(i) Každý může sušenku poslat pouze svému sousedovi či sousedce.

(ii) Pokaždé, když org předává sušenku, musí sám také jednu další sušenku sníst.

V závislosti na n najděte nejmenší číslo m takové, že při libovolném počátečním rozdělení sušenek mohou orgové konat tak, aby se k Alešovi dostala alespoň jedna sušenka.

Úloha G3. Sféru nazveme $[XY]Z$-*průměrnou*, pokud její průnik s rovinou XYZ tvoří kružnici nad průměrem XY. Čtyřstěn $XYZW$ nazveme XYZ-*kulovým*, pokud existuje sféra $\mathcal{S}$ procházející vrcholy X, Y a Z, která je zároveň $[XY]W$-, $[YZ]W$- i $[ZX]W$-průměrná. Dokažte, že pokud čtyřstěn $ABCD$ je BCD-kulový, pak je i ABC-kulový.

Úloha A3. Najděte všechny polynomy $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že pro každé kladné celé číslo n má polynom $\underbrace{P(\dots P(}_{n\text{-krát}} x) \dots)$ všechny kořeny celočíselné.[1]

[1] Říkáme, že polynom Q *má všechny kořeny celočíselné*, pokud pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňující $Q(z) = 0$ platí $z \in \mathbb{Z}$.