Řešení 5. série

Úloha C5. *V řadě je N žárovek očíslovaných postupně 1 až N. Krokem rozumíme přepnutí tří žárovek, jejichž čísla a, b, c splňují $a + c = 2b$. Určete všechna N, pro něž lze konečnou posloupností kroků všechny žárovky zhasnout nezávisle na jejich počátečním stavu.*

Řešení. Dokážeme, že podmínka na N ze zadání je ekvivalentní s $N \geq 8$. Hranatými závorkami budeme v celém řešení značit kroky.

Nejprve indukcí dokážeme, že pro $N \geq 8$ je již podmínka ze zadání splněna. Jistě nám k tomu bude stačit, když ukážeme, že za této podmínky umíme pomocí nějaké posloupnosti kroků změnit stav libovolné žárovky a stavy ostatních žárovek přitom nezměnit.

Pomocí kroků $[1, 4, 7], [4, 5, 6], [5, 6, 7]$ lze změnit stav (jen) žárovky 1, stejně tak pomocí kroků $[2, 5, 8], [5, 6, 7], [6, 7, 8]$ změníme stav žárovky 2. Předpokládejme nyní, že umíme změnit stav žárovek n a $n+1$, ukážeme, že umíme změnit stav žárovky $n+2$ (samozřejmě za předpokladu $n+2 \leq N$). To provedeme tak, že změníme stav žárovkám n a $n+1$ (což umíme dle předpokladu) a následně krokem $[n, n + 1, n + 2]$ těmto dvěma stav vrátíme a změníme stav $n + 2$. Tím je dokázáno, že pro $N \geq 8$ umíme změnit stav kterékoliv žárovky.

Nyní ukážeme, že pro $N < 8$ nejsme schopni zhasnout všechny žárovky např. pokud je na začátku rozsvícena pouze žárovka 2 (případ $N = 1$ je triviální). Rozdělme žárovky do tří skupin $\check{Z}_0, \check{Z}_1, \check{Z}_2$ podle jejich zbytku po dělení třemi. Snadno zjistíme, že každý krok buď přepne jednu žárovku v každé skupině, nebo tři žárovky v jedné skupině – pro $N < 8$ je ovšem jediným takovým krokem $[1, 4, 7]$. Stavy žárovek ze $\check{Z}_0$ a $\check{Z}_2$ lze tedy měnit jen pomocí tahů, které mění stav jedné žárovky v každé skupině, tím pádem každá změna stavu nějaké žárovky v $\check{Z}_0$ nutně znamená i změnu stavu jedné žárovky v $\check{Z}_2$ a naopak. Mají-li tedy na začátku počty svítících žárovek v $\check{Z}_0$ a $\check{Z}_2$ různou paritu (což je např. když je rozsvícena pouze žárovka 2), budou ji mít i po libovolné posloupnosti kroků, nelze tedy dosáhnout zhasnutí všech žárovek.

Poznámky opravujícího. Všichni, kdo úlohu poslali, dostali plný počet bodů. Jen jsme si mysleli, že úlohu pošle více řešitelů, protože nám přišla spíše lehčí.

Došlá řešení se mi dost líbila, protože důkazové postupy byly vskutku origiánální – žádná dvě řešení nebyla stejná. *(Alexander „Olin" Slávik)*

Úloha N5. *Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ platí $n \mid \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{n} - \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{n-1}$.*

Poznámka: patrové mocniny vyhodnocujeme shora, tj. $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Řešení. Nejprve si dokážeme pomocné lemma:

Lemma. *Pro přirozené číslo $k > 1$ existuje přirozené číslo $r < k$ s následující vlastností: Pro libovolná přirozené čísla $x, y \geq k$ splňující navíc $r \mid x - y$ platí $k \mid 2^x - 2^y$.*

Důkaz. Podívejme se na posloupnost $z_n = 2^n \bmod k$. Její hodnoty nabývají pouze $0, 1, 2, \ldots, k - 1$ a navíc je možné na tuto posloupnost nahlížet jako na posloupnost danou rekurentním vztahem $z_n = 2z_{n-1} \bmod k$ pro $n \geq 1$. Pokud se mezi prvky $z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}$ této posloupnosti vyskytuje nějaká nula, všechny prvky za ní jsou už nulové, stačí tedy zvolit $r = 1$ a bude platit $r \mid 2^x$ pro libovolné $x \geq k$, tedy i $r \mid 2^x - 2^y$.

Pokud se mezi prvními k hodnotami nula nevyskytuje, nějaká hodnota se musí objevit dvakrát. Nechť tedy $z_i = z_j$, pro $i < j < k$. Díky tomu, že posloupnost z_n splňuje rekurentní předpis, tak

$$z_{i+1} = z_{j+1}, \quad z_{i+2} = z_{j+2}, \quad \ldots, \quad z_{i+n} = z_{j+n}$$

Zvolme $r = j - i$. Potom $z_n = z_{n+r} = z_{n+cr}$ pro libovolné $n \geq i$ a celé $c \geq 0$. Když dostaneme přirozená čísla $x, y \geq k$ splňující $r \mid x - y$, označíme n jako menší z x, y a to druhé z nich budeme považovat za $n + cr$. Protože $i < k$, tak $n \geq i$ a tedy $z_x = z_y$. Z toho již plyne, že $k \mid 2^x - 2^y$. $\square$

A nyní se vrátíme k naší úloze. Označme

$$a_n = \underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}}_{n}.$$

Indukcí podle n dokážeme, že pro přirozené číslo n splňující $n > 1$ platí $n \leq a_{n-1}$ a navíc pro libovolné přirozené $k \leq n$ platí

$$k \mid a_n - a_{n-1}.$$

Pro první indukční krok $n = 2$ snadno spočítáme $a_2 - a_1 = 2$, což je dělitelné jak jedničkou, tak dvojkou, a $n = 2 \leq 2 = a_1$.

Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokažme ho pro $n + 1$. Nejprve ověříme nerovnost, $n + 1 \leq 2^n \leq 2^{a_{n+1}}$.

Pro $k = 1$ platí tvrzení zřejmě. Zvolme k splňující $1 < k \leq n$. Podle lemmatu existuje $r < k$ takové, že $k \mid 2^x - 2^y$ kdykoli $x, y \geq k$ a $r \mid x - y$. Protože $r < k \leq n + 1$ platí $r \leq n$. Využijeme indukční předpoklad $r \mid a_n - a_{n-1}$. Dále platí $n \leq a_{n-1} < a_n$, tedy předpoklady lemmatu jsou splněny pro $x = a_{n-1}$, $y = a_n$. Tedy

$$k \mid 2^{a_n} - 2^{a_{n-1}}.$$

Poznámky opravujícího. Narozdíl od vzorového řešení jste často používali Eulerovu funkci φ, která má tu vlastnost, že $2^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod a$, avšak to vás donutilo rozebrat číslo k na součin lichého čísla a mocniny dvojky. Všech osm došlých řešení se ubíralo správným směrem, avšak jen polovina byla zcela v pořádku. *(Mirek Olšák)*

Úloha A5. *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tvořena pouze přirozenými čísly, přičemž každé z nich alespoň jednou obsahuje. Navíc existuje reálné číslo $k > 0$ takové, že kdykoliv $m \neq n$, pak*

$$\frac{1}{k} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < k.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|a_n - n| < \frac{1}{2}k^2$.

Řešení (podle Štěpána Šimsy). Nejprve si uvědomíme, že pro čísla a_l, a_p splňující $a_l - a_p = 1$ platí $|l - p| < k$. Tedy vzdálenost[1] dvou čísel v posloupnosti lišících se o jedničku je menší než k.

Nejprve dokážeme $a_n - n < \frac{1}{2}k^2$.

Pro spor předpokládejme, že existuje n takové, že $a_n - n \geq \frac{1}{2}k^2$. Vezměme nejmenší číslo, které není mezi čísly $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Protože je někde v naší posloupnosti, označíme si ho a_z. Protože je těchto čísel $n - 1$ a $n < a_n$, platí $a_z \leq n < a_n$, a protože je až za číslem $n - 1$, máme $z \geq n$.

Vezmeme číslo a_y takové, že $a_y \geq a_n$ a $|y - z|$ je minimální. (Tedy nejbližší číslo posloupnosti velké aspoň a_n). Ze zadání máme

$$\frac{|a_y - a_z|}{|y - z|} < k, \quad \text{tedy} \quad |y - z| > \frac{|a_y - a_z|}{k} = \frac{a_y - a_z}{k} \geq \frac{a_n - n}{k} > \frac{n + \frac{1}{2}k^2 - n}{k} = \frac{1}{2}k.$$

Tedy mezi prvky a_i naší posloupnosti, kde $i \in \left\langle z - \frac{1}{2}k, z + \frac{1}{2}k \right\rangle \cap \mathbb{N}$, není číslo velké aspoň a_n. To je ale aspoň $\lfloor k \rfloor$ čísel. Vezměme největší číslo před těmito prvky posloupnosti. To musí být alespoň a_n. Číslo o jedna větší musí být tedy až za touto posloupností, tedy jejich vzdálenost je větší než k. To je spor a $a_n - n < \frac{1}{2}k^2$ pro všechna n.

[1] Vzáleností čísel x, y myslíme číslo $|x - y|$.

Naše posloupnost je prostá a na, tedy existuje něco jako „inverzní“ posloupnost b_n taková že $b_{a_n} = n$. Protože posloupnost b_n splňuje stejné podmínky jako a_n, platí $b_m - m < \frac{1}{2}k^2$ pro všechna m. Pokud položíme $a_n = m$, dostaneme $n - a_n < \frac{1}{2}k^2$ pro všechna n.

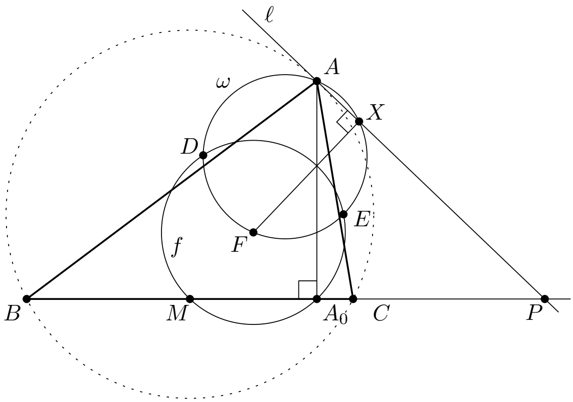
Celkově tedy dostáváme $|a_n - n| < \frac{1}{2}k^2$, což jsem chtěli dokázat. *(Michael „Majkl“ Bílý)*

Úloha G5. *Trojúhelník ABC splňující $|AB| \neq |AC|$ je vepsán do kružnice ω. Tečny vedené bodem A ke kružnici opsané středům jeho stran se jí dotýkají v bodech D, E. Ukažte, že přímka DE, přímka BC a tečna k ω vedená bodem A procházejí jedním bodem.*

Řešení. Úlohu lze řešit mnoha způsoby. My uvedeme jeden standardní, jeden trikový a nastíníme jeden „dospělý“.

Standardní řešení. Označme f Feuerbachovu kružnici[2] trojúhelníka ABC a F její střed. Jelikož AD, AE jsou tečny k f, je $|\sphericalangle ADF| = |\sphericalangle AEF| = 90°$, takže body D, E lze definovat jako průsečíky f s kružnicí nad průměrem AF, kterou označíme ω. Přímka DE je pak chordálou f a ω.

Označme ℓ tečnu ke kružnici opsané trojúhelníku ABC vedenou bodem A a P její průsečík s přímkou BC (ten existuje, neboť $AB \neq AC$). Budeme hotovi, ukážeme-li, že P má stejnou mocnost k f jako k ω.

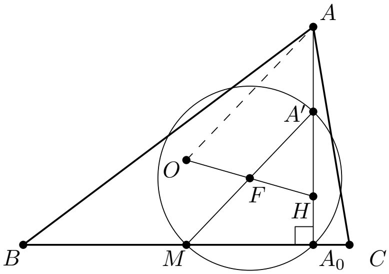


Kružnice f protne BC ve středu M strany BC a v patě výšky A_0 z bodu A. Označme X druhý průsečík ω a ℓ. Stačí ukázat, že $|PM| \cdot |PA_0| = |PA| \cdot |PX|$, neboli že čtyřúhelník MA_0XA je tětivový.

Jelikož $|\sphericalangle AA_0M| = 90°$, stačí ukázat $|\sphericalangle AXM| = 90°$. My ale víme, že $|\sphericalangle AXF| = 90°$ (AF je průměr ω), takže zbývá ukázat, že body M, X, F leží v přímce, neboli že MF je kolmá na ℓ. Tím jsme se definitivně zbavili bodů D a E i kružnice ω a převedli úlohu na jednoduché tvrzení o trojúhelníku, které lze dokázat například následovně:

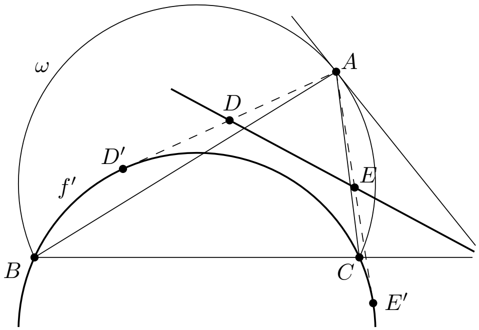
Označme H ortocentrum trojúhelníka ABC a A' druhý průsečík f a výšky AA_0. Pak $|\sphericalangle A'A_0M| = 90°$, takže MA' je průměr kružnice f. Zároveň ve stejnolehlosti se středem H a koeficientem 2 přejde f na kružnici opsanou trojúhelníku ABC, takže speciálně F přejde na O a A' na A. V trojúhelníku OHA je tedy FA' střední příčka a jelikož OA je kolmá na ℓ, je na ni kolmá i MF.

[2] Feuerbachova kružnice (či kružnice devíti bodů) daného trojúhelníka je kružnice procházející středy jeho stran, patami výšek a středy spojnic vrcholů s jeho ortocentrem.



Trikové řešení. Opět využijeme mocnost, tentokrát však podstatně důmyslněji. Symbolem $p(X, \omega)$ budeme značit mocnost bodu X ke kružnici ω.

Označme f' obraz kružnice opsané středům stran $\triangle ABC$ ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem 2 a D', E' obrazy bodů D, E. Jelikož původní kružnice procházela středy stran, prochází f' body B a C. Přímka BC je proto chordálou f' a kružnice opsané trojúhelníku ABC, kterou budeme nadále značit ω.



Vnímejme nyní bod A jako kružnici se středem A a nulovým poloměrem. Pak

$$p(D, A) = |DA|^2 = |DD'|^2 = p(D, f')$$

a podobně $p(E, A) = p(E, f')$, takže DE je chordála kružnice f' a bodu A.

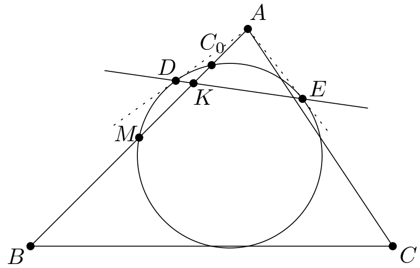
Chordálou kružnice ω a bodu A je tečna k ω vedená bodem A. Všechny tři přímky proto skutečně procházejí jedním bodem – potenčním středem kružnic f', ω a bodu A.

Nástin dospělého řešení. Označme M střed strany AB, C_0 patu výšky z vrcholu C a K průsečík AB a DE.

Jelikož DE je polára bodu A vzhledem ke kružnici opsané středům stran trojúhelníku ABC, je čtveřice $(A, K; C_0, M)$ díky známemu tvrzení harmonická[3]. Délky úseček AC_0 a AM umíme vyjádřit pomocí délek stran $\triangle ABC$, takže umíme vyjádřit i délky KC_0, KM, potažmo AK, KB.

Podobně umíme vyjádřit i poměr, v jakém přímka DE dělí stranu AC. Označíme-li tedy X průsečík DE a BC, můžeme pomocí Menelaovy věty vyjádřit poměr $XB : XC$.

[3]Pro stručné obeznámení s tím, co to je harmonická čtveřice, si můžeš přečíst například článek *http://mks.mff.cuni.cz/library/Harmonicky4PomerTP/Harmonicky4PomerTP.pdf.*



Označíme-li Y průsečík BC a tečny ke kružnici opsané trojúhelníku ABC, pak poměr $YB : YC$ snadno vyjádříme pomocí sinové věty v trojúhelnících ABY a ACY. Jak se ukáže, vyjde tatáž hodnota jako pro X (konkrétně $|AB|^2 : |AC|^2$), takže body X a Y splývají a my jsme hotovi.

Poznámky opravujícího. Sešlo se sedm správných řešení. Většina z nich se ubírala cestou prvního (standardního) řešení, přičemž s různými jeho pasážemi se vypořádávala různě elegantně. Dospělé řešení poslal *Le Anh „Tonda" Dung*, na trikové řešení nepřišel nikdo.

Úloha šla poměrně přímočaře řešit i analyticky (resp. za pomoci komplexních čísel), o čemž se přesvědčil *Rado Švarc*. *(Pepa Tkadlec)*