Riešenia 1. série

Úloha N1. *Nech d je prirodzené číslo a $a_0, a_1, a_2, \dots$ je postupnosť prirodzených čísel taká, že $a_0 = 1$ a pre všetky $n \geq 1$ platí:*

- $a_n = \frac{a_{n-1}}{3}$, *ak 3 delí a_{n-1},*
- $a_n = a_{n-1} + d$, *ak 3 nedelí a_{n-1}.*

Nájdite všetky prirodzené čísla d také, že existuje $k > 0$ také, že $a_k = 1$.

Riešenie. Ak je d deliteľné 3, tak zrejme žiaden člen postupnosti nebude deliteľný 3, a stále sa bude pripočítavať d. Preto postupnosť bude rastúca a neexistuje také $k > 0$, že $a_k = 1$.

Ak d nie je deliteľné 3, tak dokážeme, že žiaden člen postupnosti nie je väčší ako $3d$. Predpokladajme, že k je najmenší index taký, že $a_k > 3d$. Potom nutne $a_{k-1} = a_k - d, a_{k-2} = a_k - 2d, a_{k-3} = a_k - 3d$, teda v troch posledných krokoch sme pripočítali d. To je jasné, lebo ak by sme delili 3, tak by ten člen, čo sme delili 3 bol väčší ako $3d$ (a $a_k > a_k - d > a_k - 2d > d$). Lenže to znamená, že ani jedno z čísel $a_k - d, a_k - 2d, a_k - 3d$ nie je deliteľné 3, čo je spor, lebo keďže d nie je deliteľné 3, tak tieto čísla dávajú rôzne zvyšky po delení 3, a preto jedno z nich je deliteľné 3.

To znamená, že ak si zoberieme členy $a_0, a_1, \dots a_{3d}$, tak z Dirichletovho princípu sú aspoň dva z nich rovnaké (keďže všetky členy postupnosti sú zjavne prirodzené čísla). Zoberme si najmenší taký index i, že platí $a_i = a_k$ (a $i \neq k$). Ukážeme, že $i = 0$.

Ak $i > 0$, tak sa pozrieme na člen a_{i-1}. Ak $a_i \leq d$, tak zrejme $a_{i-1} = 3a_i$. Ak $a_i > d$, tak $a_{i-1} = a_i - d$, keďže všetky členy postupnosti sú najviac $3d$. To znamená, že predchádzajúci člen je jednoznačne určený. No rovnako jednoznačne je určený aj člen a_{k-1}, a preto $a_{i-1} = a_{k-1}$, čo je spor s voľbou indexu i.

Preto existuje také $k > 0$, že $a_k = a_0 = 1$. Dokázané.

To znamená, že také k existuje práve vtedy, ak d nie je deliteľné 3.

(Martin „Vodka“ Vodička)

Úloha A1. *Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ také, že pre všetky štvorice racionálnych čísel $w < x < y < z$ tvoriacich aritmetickú postupnosť platí:*

$$f(w) + f(z) = f(x) + f(y)$$

Riešenie. Všimnime si, že ak f vyhovuje zadaniu tak aj $g(x) = f(x) - f(0)$ vyhovuje zadaniu a navyše $g(0) = 0$.

Zoberme si do aritmetickej postupnosti ešte v tak aby v, w, x, y, z tvorili aritmetickú postupnosť. Potom platia rovnosti

$$g(w) + g(z) = g(x) + g(y) \tag{1}$$
$$g(v) + g(y) = g(w) + g(x) \tag{2}$$

Sčítaním (1) a (2) dostaneme

$$g(v) + g(z) = 2g(x) = 2g\left(\frac{v+z}{2}\right)$$

lebo x je aritmetický priemer v a z.

Dosaďme $[v, z] = [0, 2t]$ a dostaneme $g(2t) = 2g(t)$, čo po spätnom dosadení dá

$$g(v) + g(z) = g(v + z)$$

To už je Cauchyho funkcionálna rovnica[1]. Jej riešenia sú $g(x) = ax$ pre $a \in \mathbb{Q}$. My ale chceme f, teda $f(x) = ax + f(0) = ax + b$ pre pevné $a, b \in \mathbb{Q}$. Všetky takéto funkcie vyhovujú pôvodnej rovnici. *(Miro Psota)*

Úloha C1. *V každom políčku tabuľky $2m \times 2n$ sa nachádza celé číslo. Môžeme robiť nasledujúcu operáciu: Zvolíme si tri políčka, ktoré tvoria L-triomino (teda nejaké políčko C a dve ďalšie ktoré s ním susedia hranou, jedno vodorovne a druhé zvislo) a pripočítame 1 k číslu napísanému v každom z nich. Nájdite všetky dvojice čísel m, n také, že pre ľubovoľnú počiatočnú pozíciu, sa vieme dostať do stavu, keď je v každom políčku tabuľky rovnaké číslo.*

Riešenie. Na začiatok si všimnime, že v každom ťahu zvýšime tri políčka o 1, teda súčet čísel v tabuľke sa nám zväčší o 3. Preto súčet čísel v tabuľke bude dávať po delení tromi rovnaký zvyšok. Tu si už môžeme všimnúť, že ak m alebo n je deliteľné tromi, tak čisla v tabuľku nemusíme vedieť vyrovnať. Ak je totiž na každom políčku tabuľky číslo k, tak súčet všetkých čísel je $4mnk$, čo je násobok troch. Ak však tabuľku vyplíme nulami a jednou jednotkou, tak súčet jej čísel bude dávať po delení tromi zvyšok 1, z ktorého zvyšok 0 našimi operáciami nedostaneme.

Poďme sa pozrieť na tabuľky, v ktorých ani m, ani n nie sú deliteľné tromi. Najprv skúsme vyrovnať tabuľku 2×2. Označme si čísla v nej a, b, c, d tak, že $a \leq b, c, d$. Potom nám stačí postupne $(b-a)$-krát, $(c-a)$-krát, resp. $(d-a)$-krát zvoliť L-triominom všetky políčka okrem toho, kde bolo na začiatku b, c, resp. d (vďaka voľbe a sú všetky počty ťahov nezáporné). Po týchto ťahoch na každom políčku bude číslo $b + c + d - 2a$.

Ak máme všeobecnú tabuľku $2m \times 2n$ (kde 3 nedelí mn), tak si ju môžeme rozdeliť na $m \times n$ štvorčekov 2×2. V každom štvorčeku už vieme vyrovnať čísla. Ďalej, ak vyberieme v štvorčeku 2×2 L-triomino všetkými šyrmi možnými spôsobmi, tak zväčšíme v ňom každé číslo o 3. Takto by sa nám mohlo skoro podariť vyrovnať všetky čísla v tabuľke. Na to, aby sa nám to úplne podarilo, stačí nám zariadiť, aby súčet čísel v každom štvorčeku 2×2 bol rovnaký. Poďme si to teda ukázať.

Označme S pôvodný súčet čísel tabuľky. Najprv zistime, aký zvyšok k po delení tromi budú davať čísla tabuľky, ak budú na každom políčku rovnaké. Súčet čísel výslednej tabuľky bude teda $4mnk$. Keďže zvyšok súčtu čísel v tabuľke po delení tromi sa nemení, musí platiť $S \equiv 4mnk \equiv mnk \pmod 3$. Keďže $3 \nmid mn$ a 3 je prvočíslo, taký zvyšok bude existovať a bude preň platiť $k \equiv S(mn)^{-1} \pmod 3$, kde $(mn)^{-1}$ je inverzný prvok vzhľahom na násobenie mod 3 (zistiť k možno aj rozobratím prípadov). Súčet čísel v každom štvorčeku 2×2 výslednej tabuľky teda musí dávať po delení tromi zvyšok $4k \equiv k \pmod 3$.

Zoraďme si teraz všetky štvorčeky 2×2 do postupnosti: zľava doprava pridáme štvorčky v prvom riadku, podom v opačnom smere pridáme štvorčeky v druhom riadku atď. Vytvoríme takého „hadíka“. V tejto postupnosti má každý štvorček (okrem posledného) spoločnú stranu s nasledujúcim štvorčekom. Zoberme si prvý štvorček tejto postupnosti. Ak zvolíme L-triomino presahujúce spoločnú stranu medzi prvými dvomi štvorčekmi tak, aby jedno jeho políčko bolo v prvom štvorčeku a druhé dve v druhom, tak zvýšime súčet čísel v prvom štvorčeku o 1. Tento postup opakujeme, kým súčet čísel v prvom štvorčeku nebude dávať po delení tromi zvyšok k. Všeobecne v i-tom ($1 \leq i < mn$) kroku súčet čísel v štvorčekoch $1, 2, \ldots, i-1$ už bude dávať po delení tromi zvyšok k a volením L-triomín cez spoločnú stranu štovrčekov i a $i+1$ upravíme zvyšok súčtu čísel v i-tom štvorčeku, aby dával zvyšok k. Na konci bude súčet čísel v každom štvročeku okrem posledného dávať zvyšok k. Zvyšok posledného štvorčeka zistíme ako $S - (mn-1) \cdot k \equiv S - mnk + k \equiv k \pmod 3$, keďže k sme zvolili tak, aby $S \equiv mnk$.

Teda sme upravili tabuľku tak, aby súčet čísel v každom štvorčeku dával rovnaký zvyšok po delení tromi. Teraz vyššie spomínamým postupom upravíme každý štovrček 2×2 tak, aby v ňom boli rovanké čísla. Tieto úpravy nám zvyšok súčtu čísel v štvorčekoch nezmenia. A keďže

[1] Viac informácií a aj dôkaz nájdete napríklad tu: `https://mks.mff.cuni.cz/library/CauchyovaRovniceDS/CauchyovaRovniceDS.pdf`

stále čísla v tabuľke dávajú rovnaký zvyšok po delení tromi, vieme ľahko postupným zvyšovaním všetkých čísel v štvročekoch 2×2 o 3 dosiahnuť, aby všetky čísla v tabuľke boli rovnaké.

Poznámky opravovateľa. Úloha nebola veľmi náročná. Na nutnú podmienku $3 \nmid mn$ prišli všetci riešitelia a konštrukciu väčšina riešiteľov našla tiež. Menším problémom bolo nájsť jednoduchšiu konštrukciu, ktorá by sa ľahko popisovala a jej správnosť by sa pohodlne dokazovala. Dalo sa tak vyhnúť rozoberaniu prípadov a riziku, že na niečo zabudneme. *(Jozef Rajník)*

Úloha G1. *Daný je trojuholník ABC s opísanou kružnicou k_1. Bod dotyku kružnice vpísanej do tohto trojuholníka so stranou BC nazveme N. Nech k_2 je taká kružnica, že sa dotýka BC v N a kružnice k_1 na rovnakej polrovine oddelenej priamkou BC ako bod A. Nech O je stred k_2 a J je stred kružnice pripísanej k strane BC. Dokážte, že AO je rovnobežná s JN.*

Riešenie. Nech I je stred vpísanej kružnice. Zrejme platí, že body O, I, N ležia na priamke a tiež body A, I, J ležia na priamke. Ak platí $|AB| = |AC|$, tak zrejme všetky tieto body ležia na osi úsečky BC, preto $AO \parallel JN$. Ďalej predpokladajme, že $|AB| < |AC|$. Stačí nám ukázať, že trojuholníky AIO a JIN sú rovnoľahlé (a podobné), lebo z toho už vyplýva rovnobežnosť AO a JN.

Uvažujme rovnoľahlosť so stredom v I v ktorej sa zobrazí J na A. V tejto rovnľahlosti sa kružnica s priemerom JI (na ktorej ležia aj body B, C) zobrazí na kružnicu s priemerom AI. Je známa prevarená úloha, že ak X, Y sú body na priamkach BI, CI také, že $|\angle BXA| = |\angle CYA| = 90^\circ$, tak X, Y ležia na strednej priečke rovnobežnej s BC.

Dôkaz je ľahký - ak C_1 je stred strany AB, a X' je bod na priesečníku BI a strednej priečky, tak BC_1X' je rovnoramenný (z rovnobežnosti BC a strednej priečky je $|\angle C_1X'B| = |\angle X'BC| = |\angle X'BC_1|$), preto $|C_1X'| = |C_1B| = |C_1A|$, z čoho vyplýva, že $\angle BX'A$ je pravý, a preto $X' \equiv X$. Obdobne pre Y.

To znamená, že priamka BC sa v tej rovnoľahlosti zobrazí na strednú priečku, lebo body X, Y sa zobrazia na popísané body X, Y. Preto bod N sa zobrazí na taký bod O' na priamke NI, že $|NO'| = v_a/2$. Treba ukázať, že $O' \equiv O$.

Kružnica k_2 je daná jednoznačne (to je nejak jasné, a keby nebolo, tak sa ľahko dá z rovnoľahlosti odvodiť, že jej bod dotyku z opísanou kružnicou je na priamke $S_{BC}N$, kde S_{BC} je stred oblúka BC, z čoho je to už naozaj jasné, lebo bod dotyku je určený jednoznačne). Preto stačí overiť, že kružnica so stredom v O' a polomerom $|NO'|$ vyhovuje. Ak označíme S stred opísanej kružnice a R jej polomer, tak stačí overiť, že $|O'S| = R - |NO'|$. Tak zatnime zuby a poďme na to. Budeme používať štandardné značenie. Keďže obe strany sú kladné stačí to dokázať po umocnení na druhú. Platí:

$$(R - |NO'|)^2 = R^2 - Rv_a + \frac{v_a^2}{4} = R^2 - \frac{bc}{2} + \frac{v_a^2}{4}$$

Využili sme vzťah $Rv_a = \frac{bc}{2}$, ktorý sa dá ľahko odvodiť zo vzťahov $\frac{b}{2R} = \sin\beta = \frac{v_a}{c}$. Dĺžku $O'S$ odvodíme z Pytagorovej vety, označme M stred BC:

$$|O'S|^2 = (|NO'| - |SM|)^2 + |NM|^2 = \left(\frac{v_a}{2} - R\cos\alpha\right)^2 + \left(\frac{b-c}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{v_a^2}{4} - Rv_a\cos\alpha + R^2\cos^2\alpha + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{bc}{2} = \frac{v_a^2}{4} - \frac{bc}{2}\cos\alpha + R^2 - R^2\sin^2\alpha + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{bc}{2}$$

Využili sme vzťah $|MN| = \left|\frac{b-c}{2}\right|$, čo plyne z $|BM| = \frac{a}{2}$ a $|BN| = \frac{a-b+c}{2}$. Stačí nám porovnať tie dva výrazy čo nám vznikli a upravovať:

$$R^2 - \frac{bc}{2} + \frac{v_a^2}{4} = \frac{v_a^2}{4} - \frac{bc}{2}\cos\alpha + R^2 - R^2\sin^2\alpha + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{bc}{2}$$

$$R^2 \sin^2 \alpha = -\frac{bc}{2} \cos \alpha + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$
$$\frac{a^2}{4} = -\frac{bc}{2} \cos \alpha + \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$$

Lenže posledný vzťah nie je nič iné ako kosínusová veta, a preto platí, z čoho spätne máme aj platnosť pôvodného vzťahu. Teda táto kružnica vyhovuje a musí $O \equiv O'$. Preto sú trojuholníky AIO a AJN naozaj rovnoľahlé a platí $AO \parallel JN$.

Poznámky opravovateľa. Úlohu vyriešili traja riešitelia. Všetci to nejakým viac alebo menej zložitým spôsobom upočítali (skôr viac). Ak neviete prísť na niečo pekné, netreba sa toho báť, treba mať len dobrý plán. Ak máte plán a viete čo robíte, tak to tak ako vo vzoráku proste musí vyjsť :) *(Martin „Vodka“ Vodička)*