

Riešenia 6. série

Úloha A6. Uvažujme pre reálne $r \geq 2$ rovnicu $x^2 = r[x]$ v kladnej reálnej premennej x . Dokážte, že pre každé $r \geq 2$ má táto rovnica buď práve dve, alebo práve tri riešenia $x \in \mathbb{R}^+$.

Riešenie. Polouzavřený interval $[n, n+1)$ pro přirozené n nazýváme *pásem*. Všimněme si, že pro dané $n \in \mathbb{N}$ je pro každé $x \in [n, n+1)$ pravá strana rovnice $x^2 = r[x]$ stejná, proto v každém pásu má rovnice nejvýše jedno řešení. Nejprve tedy ohraničíme počet pásů, ve kterých může řešení rovnice ležet.

Zprvė, neexistuje řešení v pásu $[0, 1)$, protože pak $[x] = 0$ a tedy by muselo být $x = 0$. Proto předpokládejme $x \geq 1$. Dále zkusme, ve kterých pásch může řešení rovnice ležet.

Lemma 1. Pokud x splňuje rovnici $x^2 = r[x]$, tak $[x] \in \{[r], [r] - 1, [r] - 2\}$.

Důkaz. Zapišme $x = n + f$, kde $n = [x]$ a $f \in [0, 1)$. Protože n , r i f jsou nezáporná, můžeme psát

$$(n + f)^2 = rn \implies f = \sqrt{rn} - n \implies 0 \leq \sqrt{rn} - n < 1.$$

Snadnou úpravou získáme (pamatujme, že $n \geq 1$)

$$n \leq r < \frac{(n+1)^2}{n} = n + 2 + \frac{1}{n} \leq n + 3.$$

Platí $r - 3 < n \leq r$. Pokud $n \geq [r] + 1$ a nebo $n \leq [r] - 3$, tak získáme spor s právě získaným řetězcem nerovností. Je tak opravdu $[x] \in \{[r], [r] - 1, [r] - 2\}$. $\square$

Jak jsme již předtím zmínili, v každém pásu leží nejvýše jedno řešení, proto daná rovnice má pro každé r nejvýše tři řešení. Nyní ukážeme, že vždy existují řešení, kde $[x] = [r]$ a $[x] = [r] - 1$.

Lemma 2. Ať n je takové přirozené číslo, že $n \leq r < n + 2 + \frac{1}{n}$. Potom v pásu $[n, n+1)$ existuje řešení rovnice.

Důkaz. Pro $x \in [n, n+1)$ řešíme rovnici $r = \frac{x^2}{[x]}$. Pravá strana je na daném pásu kvadratická funkce v x , která je rostoucí a spojitá. Proto nabývá všech hodnot mezi krajními body pásu, tj. rovnice má řešení, právě pokud

$$r \in D\left(\frac{x^2}{n}\right) = \left[\frac{n^2}{n}, \frac{(n+1)^2}{n}\right) = \left[n, n + 2 + \frac{1}{n}\right).$$

$\square$

Vidíme, že pro $n \in \{[r], [r] - 1\}$ je splněn pár nerovností $n \leq r < n + 2 + \frac{1}{n}$, proto rovnice má vždy alespoň dvě řešení. Jsme doma.

Poznámky opravovatele.

(Zdeněk Pezlar)

Úloha N6. Žirafa Anna priniesla Michalovi prvočíslo $p > 2$ a poprosila ho, aby našiel permutáciu $(x_1, x_2, \dots, x_{p-1})$ čísel $1, 2, \dots, p-1$, ktorá bude spĺňať

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{p-3}x_{p-2} + x_{p-2}x_{p-1} \equiv 2 \pmod{p}.$$

„Jasne, idem tu permutáciu hneď zrátať!“, zvolal nadšene Michal. Žirafa odvetila „Nič nerátaj, určite existuje nejaká pekná...“ Dokážte, že pre každé $p > 2$ takáto permutácia existuje.

Riešenie. Modulo prvočíslo existujú jednoznačné multiplikatívni inverzy – pro každé celé číslo a , jež není násobkem p , existuje b takové, že $ab \equiv 1 \pmod{p}$, a toto b je navíc určeno jednoznačně modulo p . Můžeme tedy značit $b = \frac{1}{a}$.

S týmto môžeme v úlohe zvolit permutáciu složenou z čísel $x_k = \frac{1}{k}$. Inverzy rôznych nenulových (modulo p) čísel musí byť opäť rôzne a nenulové, takže dostaneme $(p-1)$ -tici čísel, ktoré nie sú násobky p a sú rôzne modulo p – musí to teda byť permutácia $1, 2, \dots, p-1$. S touto permutáciou pak obdržime

$$x_k x_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

takže výraz ze zadání bude teleskopickou řadou

$$\sum_{k=1}^{p-2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \equiv \frac{1}{1} - \frac{1}{p-2+1} \equiv \frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \equiv 1 - (-1) \equiv 2 \pmod{p}.$$

Poznámky opravovateľa. Úloha se dala „ubít“ mnoha způsoby. Vzorák používá trikovou konstrukci s teleskopickou řadou. Nejčastěji se však objevoval jeden ze dvou přístupů:

Prvním bylo pozorování, že pokud začneme s identickou permutací $x_k = k$, pak (alespoň pro $p > 3$) dává tato permutace součet 0 modulo p a následně prohození libovolných dvou sousedních členů snižuje součet o 3. Toto lze opakovat (pokud prohazované dvojice neleží hned vedle sebe), což s jistým rozlišením případů podle zbytku p modulo 3 vede k výsledku.

Druhá cesta vedla přes kvadratické zbytky. Jakoukoliv permutaci můžeme přenásobit jakýmkoliv $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, čímž bude výsledkem přenásoben a^2 . Stačí tedy trefit kvadratický zbytek či nezbytek podle toho, čím bude mod p dvojka. Toho lze (alespoň pro dostatečně velká prvočísla) dosáhnout mnoha ad hoc způsoby, např. cyklickým rotováním a/nebo obracením intervalů v identické permutaci. (Matěj Doležálek)

Úloha G6. Majme tetivový konvexný šesťuholník $ABCDEF$. Označme K, L postupne priesečníky AB s DC a AF s DE . Ďalej nech je P priesečník BE s CF . Označme O_1, O_2 postupne stredy kružníc opísaných trojuholníkom BCK a EFL . Dokážte, že body O_1, P a O_2 ležia na priamke.

Riešenie. Budeme Pascalit. Nech A^* a D^* sú antipodály A a D , a nech $P = BA^* \cap D^*C$ a $Q = D^*E \cap M$ a N sú stredy PG a QH , v uvedenom poradí.

Teraz nech $R = BE \cap CF$. Použitie Pascalovej vety na $ABCDEF$ znamená, že R, G a H sú kolineárne. Na druhej strane, opätovným použitím Pascalovej vety v bode BA^*FCD^*E dostaneme, že P, R a Q sú kolineárne.

Preto, aby sme ukázali, že M, R a N sú kolineárne, stačí ukázať, že $GM \parallel NH$. To je len uhlenie; máme

$$\angle(NH, ED) = \frac{\pi}{2} + \angle(HF, FE) = \frac{\pi}{2} + \angle AFE$$

podobne

$$\angle(GM, AB) = \frac{\pi}{2} - \angle DCB$$

teda

$$\angle(NH, ED) + \angle(GM, AB) - \angle AFE - \angle DCB = \angle(AB, DE)$$

z čoho plynie želaný záver.

(Michal Pecho)

Úloha C6. Majme zadané dve nesúdeliteľné prirodzené čísla p, q . Na číselnej osi stojí klokan. A pretože ho baví skákať, tak si nejako skáče doľava a doprava. Vždy, keď skáče doprava, poskočí o vzdialenosť p , a vždy, keď doľava, poskočí o vzdialenosť q . Po nejakej dobe doskáče tam, kde začal. Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $d < p + q$ existujú čísla, na ktorých klokan bol a sú vzdialené presne d .

Riešenie. Skákání klokana můžeme reprezentovat jako posloupnost n čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde $a_i \in \{p, -q\}$ pro $1 \leq i \leq n$. Protože klokan skončil na stejném místě, jak začal, tak $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Zároveň si můžeme říct, že klokan skáče pořád dokola po té stejné cestě, tedy $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2, \dots$.

Všimněme si, že vzdálenost míst, kde klokan byl po j skocích a k skocích, kde $k > j$, je $\left| \sum_{i=j+1}^k a_i \right|$. Pro zjednodušení zápisu budeme označovat jako $d_{j,l}$ součet l čísel, počínajících indexem j , tedy $d_{j,l} = \sum_{i=j}^{j+l-1} a_i$. Chceme ukázat, že pro každé $d < p+q$ existují čísla $1 \leq j, l \leq n$ taková, že $d_{j,l} = d$, protože pak vzdálenost čísel, na kterých byl klokan po $(j-1)$ -ním skoce a $(j+l-1)$ -ním skoce, bude přesně d .

Protože ale $p \equiv -q \pmod{p+q}$, tak $d_{j,l} = \sum_{i=j}^{j+l-1} a_i \equiv pl \pmod{p+q}$. Protože je $p+q$ a p nesoudělné, tak pro libovolné d existuje $l \neq 0$ takové, že $pl \equiv d$, a to $l \equiv \frac{d}{p}$ (dělit můžeme právě díky nesoudělnosti). Tedy víme, že pro libovolné d platí, že $d_{j,l} \equiv d$ pro jakékoli $1 \leq j \leq n$ a $l \equiv \frac{d}{p}$. Budeme chtít tedy ukázat, že existuje nějaké j takové, aby platila přímo rovnost $d_{j,l} = d$ a ne jen kongruence.

Nejprve si všimněme, že

$$\sum_{i=1}^n d_{i,l} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^{i+l-1} a_j = \sum_{i=1}^n l a_i = l \sum_{i=1}^n a_i = 0.$$

Zároveň také $|d_{i,l} - d_{i+1,l}| = |a_i - a_{i+l}| \in \{0, p+q\}$. Protože ale $d_{i,l} \equiv d \neq 0$ a $\sum_{i=1}^n d_{i,l} = 0$, tak musí pro nějaká i být $d_{i,l}$ záporné a pro zbylá i kladné. Protože se ale "sousední" $d_{i,l}$ a $d_{i+1,l}$ liší buď o 0, nebo $p+q$, tak musí pro nějaké i nastat $d_{i,l} \in \langle 1, p+q \rangle$. A protože $d_{i,l} \equiv d \pmod{p+q}$ a $d < p+q$, tak už nutně $d_{i,l} = d$, jak jsme chtěli.

(Radek Olšák)