Riešenia 6. série

Úloha N6. *Nájdite všetky neprázdne konečné množiny prirodzených čísel M také, že ak $m, n \in M$ a ℓ je ich najväčší spoločný deliteľ, tak*

$$\frac{m+n}{\ell} \in M.$$

Riešenie. Největší společný dělitel čísel m, n budeme v řešení značit (m, n). Zvolme libovolné $k \in M$. Potom dosazením k za m a n dostaneme:

$$2 = \frac{k+k}{k} = \frac{k+k}{(k,k)} \in M.$$

Pro spor předpokládejme, že v M je ještě jiné číslo než dvojka. Pokud by bylo liché, tak můžeme vybrat největší takové liché číslo, jelikož M je konečná. Označme ho t. Potom ale dostáváme:

$$t+2 = \frac{t+2}{(t,2)} \in M.$$

To je spor s volbou t jako největšího lichého prvku M.

Pokud se v M vyskytují ještě jiná sudá čísla kromě dvojky, označme s nejmenší z nich. Podobně jako výše dostáváme, že $\frac{s+2}{2}$ leží v množině M. Ovšem $\frac{s+2}{2}$ je aritmetickým průměrem s a 2. To znamená, že množina M obsahuje prvek větší než 2 a menší než s. To ale není možné, neboť M neobsahuje žádná lichá čísla a s jsme volili jako nejmenší sudý prvek M větší než 2.

Snadno ověříme, že jedinou vyhovující množinou je $M = \{2\}$.

(Pavel Hudec)

Úloha A6. *Majme postupnosť $S_1 = 1, S_{n+1} = \frac{(2+S_n)^2}{4+S_n}$. Ak $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, dokážte nerovnosť $a_n \geq \frac{4}{\sqrt{9n+7}}$.*

Riešenie. Pojmenujme $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x+4} = x + \frac{4}{x+4}$ – pak $S_{n+1} = f(S_n)$. Dokažme, že f je na nezáporných číslech rostoucí. Pro $x, y \geq 0$ je určitě $(x+4)(y+4) - 4 > 0$, takže $x > y$ dovedeme ekvivalentně upravit na

$$\begin{aligned}
(x-y)((x+4)(y+4)-4) &> 0,\\
(x-y)(x+4)(y+4) + 4(y+4-x-4) &> 0,\\
x - y + 4\left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{y+4}\right) &> 0,\\
f(x) &> f(y).
\end{aligned}$$

Pro konzistentnost položme $S_0 = 0$ (to vyhovuje $S_1 = f(S_0)$). Dokazovanou nerovnost $a_n \geq \frac{4}{\sqrt{9n+7}}$ ekvivalentně upravme na

$$\begin{aligned}
S_n - S_{n-1} &\geq \frac{4}{\sqrt{9n+7}},\\
f(S_{n-1}) - S_{n-1} &\geq \frac{4}{\sqrt{9n+7}},\\
\frac{4}{S_{n-1}+4} &\geq \frac{4}{\sqrt{9n+7}},\\
S_{n-1} &\leq \sqrt{9n+7} - 4. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Nerovnost (1) dokažme indukcí vzhledem k n. Pro $n = 1$ platí, přičemž nastává rovnost. Předpokládejme nyní, že (1) platí pro nějaké $n = k \in \mathbb{N}$, a dokažme její platnost pro $n = k + 1$. Pro $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$1 + \sqrt{1 + \frac{9}{9k+7}} \le \frac{9}{4}, \tag{2}$$

neboť pro $k = 1$ nastává rovnost a výraz na levé straně je očividně klesající vzhledem ke k. Tuto nerovnost lze ekvivalentně upravit na

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{9k+16} + \sqrt{9k+7}}{\sqrt{9k+7}} &\le \frac{9}{4}, \\ \frac{4}{\sqrt{9k+7}} &\le \frac{9}{\sqrt{9k+16} + \sqrt{9k+7}}, \\ \frac{4}{\sqrt{9k+7}} &\le \sqrt{9k+16} - \sqrt{9k+7}. \end{aligned} \tag{3}$$

Pro přirozené k platí $\sqrt{9k+7} - 4 \ge 0$. Indukčním předpokladem platnosti (1) pro $n = k$, nezáporností S_{k-1} (ta je zřejmá), rostoucností f na nezáporných číslech a platností (3) tak musí být

$$\begin{aligned} S_k = f(S_{k-1}) \le f\left(\sqrt{9k+7} - 4\right) = \sqrt{9k+7} - 4 + \frac{4}{\sqrt{9k+7}} \le \\ \le \sqrt{9k+7} - 4 + \sqrt{9k+16} - \sqrt{9k+7} = \sqrt{9k+16} - 4. \end{aligned}$$

Tímto je hotov indukční krok, pročež (1) platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$, čímž je úloha vyřešena.

(Vašek Voráček)

Úloha G6. *Je daný trojuholník ABC s vpísanou kružnicou ω. Jeho A-pripísaná kružnica sa dotýka strany BC v bode A'. Nech X je bod na úsečke AA' taký, že úsečka XA' nemá s ω žiadny spoločný bod. Dotyčnice k ω z X pretínajú BC v bodoch Y, Z. Dokážte, že hodnota výrazu $|XZ| + |XY|$ nezávisí na voľbe bodu X.*

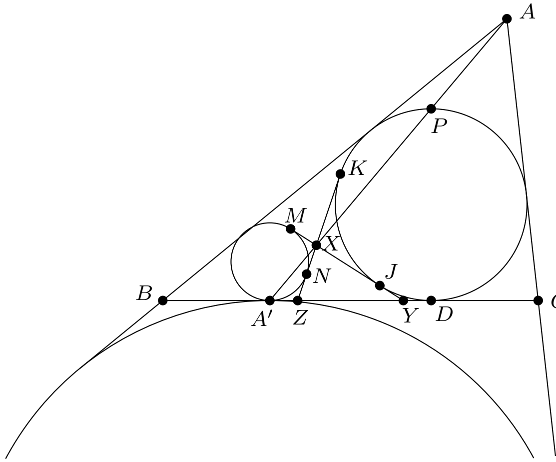
Riešenie. Přímku BC si nakresleme vodorovně a BÚNO nechť na ní leží body v pořadí B, A', Z, Y, D a C, kde bod D je bodem dotyku ω s BC. Označme P ten průsečík AA' s ω, který je blíže bodu A. Dále A-připsanou kružnici trojúhelníku ABC jako ϵ, Y-připsanou kružnici trojúhelníku XYZ jako π. Body dotyku přímky XY s π a ω jako M, J a analogicky body dotyku XZ s danými kružnicemi jako N a K. Jako *nejvyšší bod* kružnice obecně označím ten bod, jehož tečna k dané kružnici je rovnoběžná s BC a leží ze dvou takovýchto bodů více „nahoře“ (vzhledem k přímce BC). Analogicky definujme *nejnižší bod* kružnice. Například bod A' je v této definici nejvyšší bod ϵ. Díky tomu, že stejnolehlost zachovává směr přímek, tak stejnolehlost s kladným koeficientem mezi dvěma kružnicemi zobrazí nejvyšší bod jedné kružnice na nejvyšší bod té druhé a stejnolehlost se záporným koeficientem zobrazí nejvyšší bod jedné na nejnižší bod druhé.

Přímky AB a AC jsou společné tečny A-připsané kružnice trojúhelníku ABC a ω. Existuje tak stejnolehlost s kladným koeficientem se středem v A, která zobrazuje ϵ na ω. Vzhledem k výše uvedené úvaze je pak bod P jako obraz A' nejvyšší bodem ω. Obdobně XY a XZ jsou společné tečny kružnic ω a π, a tak existuje stejnolehlost se záporným koeficientem (vzhledem ke vzájemné pozici kružnic a tečen) se středem X zobrazující tyto kružnice na sebe. Bod A' je tak jako obraz P nejnižší bod π, tedy bod, ve kterém se π dotýká BC. Pomocí tohoto klíčového pozorování už můžeme výsledek snadno dopočítat.

Díky stejným delkám tečen z bodu ke kružnici platí následující rovnosti:

$$|XY| + |XZ| = |XY| + |XN| + |ZN| = |XY| + |XM| + |A'Z| = |YM| + |A'Z| = |A'Y| + |A'Z|.$$

Analogicky můžeme ze symetrie odvodit rovnost $|XY| + |XZ| = |DY| + |DZ|$. Dohromady $2(|XY| + |XZ|) = 2|A'Z| + |ZY| + 2|DY| + |YZ| = 2|A'D|$. Protože hodnota $|A'D|$ nezávisí na volbě bodu X, je úloha dokázána.



Poznámky opravovateľa. Většina došlých řešení odvodila rovnost $|XY|+|XZ| = |DY|+|DZ|$ a správně si tipla, že je to rovno $|A'D|$. Klíčový trik pak byl dokreslit si kružnici připsanou XYZ, abychom udělali obrázek víc symetrický a mohli odvodit i druhou rovnost. Sešla se i více či méně úspěšná analytická řešení. *(Martin Raška)*

Úloha C6. *Pavel našiel n bodov v priestore, pre ktoré platí, že žiadne štyri neležia v jednej rovine. Každý bod je buď červený alebo modrý. Zároveň si všimol, že $n-1$ dvojíc bodov je spojených povrázkami, pričom povrázok vždy spája dva body rôznej farby a povrázky nikde netvoria cyklus. Pretože sa Pavel nudil, rozhodol sa zahrať si nasledujúcu hru: vždy nájde štvoricu bodov A, B, C, D, pre ktoré platí, že A je červený a dvojice AB, BC a CD sú spojené povrázkom, a naviac platí $|AB| + |CD| > |BC| + |AD|$. Potom rozpojí dvojicu AB, ale zase spojí dvojicu AD. Existuje situácia, kedy toto mohol robiť nekonečne dlho?*

Riešenie. Uvažujme pevně daný červený bod X. Na okamžik si představme, že všechny hrany stromu jsou orientovány směrem pryč od X. Potom jako S_X označíme součet všech orientovaných hran jdoucích z červeného bodu do modrého.

Nechť T_n značí součet S_X přes všechny červené body X po n krocích. Ukážeme, že $T_n > T_{n+1}$. Potom, protože T_n může zjevně nabývat jen konečně mnoha možných hodnot, nemůže proces nikdy pokračovat do nekonečna.

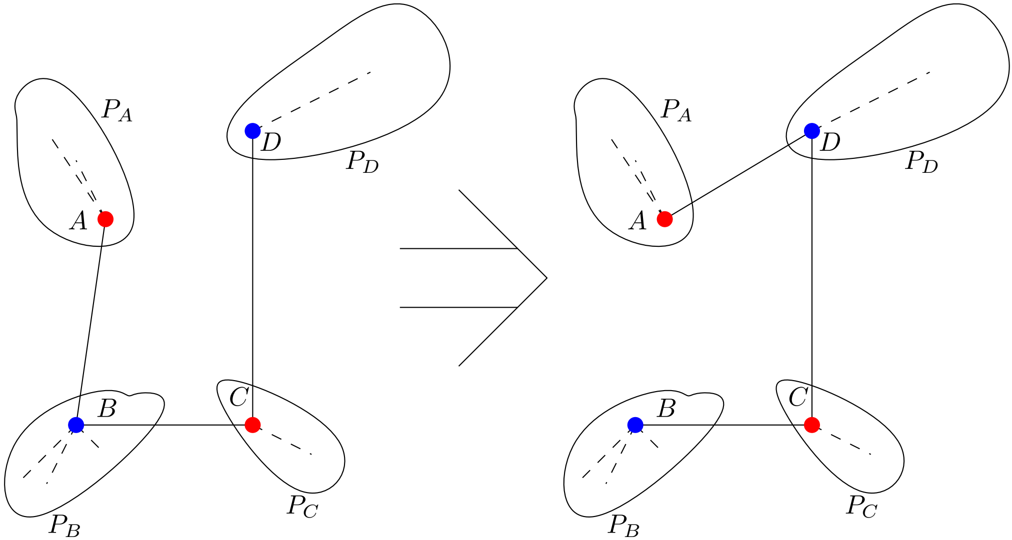
Na začátku je příslušný graf stromem a po každém kroku má stejný počet hran a zůstává souvislý, takže zůstává stromem.

V následujícím budeme rozlišovat mezi grafovou vzdáleností dvou vrcholů (tj. nejmenší počet hran, pomocí kterých jdou spojit) a euklidovskou vzdálenost (normální vzdálenost v prostoru).

Nechť Pavel provede záměnu provázků na vrcholech A, B, C, D jako v zadání. Jako P_A, P_B, P_C a P_D si postupně označíme části grafu, které jsou grafově nejblíže A, B, C, resp. D.

Protože při přepojení provázků se nemění barva vrcholů, ani parita grafové vzdálenosti, stačí sledovat hrany mezi A, B, C a D.

Je-li X v P_A z S_X vypadne $|AB|$ a $|CD|$, ale přibude $|AD|$ a $|BC|$, tedy ze zadání se ostře S_X zmenšilo. Pro X v P_B, P_C a P_D se S_X vůbec nezmění. Protože v P_A existuje červený bod (přinejmenším bod A), zmenší se T_n ostře.



(Rado van Švarc)