Řešení 3. série

Úloha N3. *Šošo napsal na tabuli několik přirozených čísel. Pak přišel Džavo a několikrát provedl následující operaci: Vybral si dvě čísla a a b napsané na tabuli se stejnou paritou a dopsal na tabuli i $\frac{a+b}{2}$ (původní čísla a a b na tabuli nechal). Po nějaké době byla na tabuli napsaná právě čísla $1, 2, \dots, n$. V závislosti na n určete, kolik nejméně čísel mohl Šošo na tabuli napsat.*

Řešení. Vyriešme najprv okrajový prípad, keď $n = 1$. V tom prípade muselo byť na začiatku práve jedno číslo.
Vo všetkých ostatných prípadoch platí, že na začiatku museli byť na tabuli aspoň dve čísla a to 1 a n, lebo tie priemerovaním nevieme dostať.
Ak by číslo n bolo v tvare $2^k + 1$ pre nejaké $k \in \mathbb{N}_0$, tak vieme všetky čísla od 1 do n dostať na tabuľu. Ukážeme si to indukciou. Povedzme, že pre všetky $i \le k$ platí, že vieme z čísel 1 a $2^i + 1$ vyskladať všetky čísla medzi nimi. Dokážme, teraz, že to vieme aj z čísel 1 a $2^{k+1} + 1$. V prvom kroku spriemerujeme čísla 1 a $2^{k+1} + 1$ a dostaneme $2^k + 1$. Z indukcie vieme, že čísla od 1 po $2^k + 1$ už vieme dostať. Keď však budeme priemerovať čísla od $2^k + 1$ do $2^{k+1} + 1$, tak to bude vyzerať presne rovnako ako v prvej polke, len posunuté o konštantu 2^k. Tým pádom vieme dostať priemerovaním aj túto druhú polku.
Zostáva nám prípad, keď n nie je tohto tvaru. Potom ho vieme zapísať ako $n = l \cdot 2^k + 1$, kde l je nepárne (liché) číslo. Všimnime si, že keď spriemerujeme dve čísla, ktoré majú zvyšok 1 po delení číslom l tak ich priemer bude mať tiež zvyšok 1 po delení číslom l. Tým pádom nikdy nebudeme schopní dosiahnuť číslo s iným zvyškom po delení číslom l ako jedna a teda nebudeme schopní napísať všetky čísla od 1 po n. Ukážme, že sa to vždy dá s troma počiatočnými číslami. Nech sú na tabuli na začiatku čísla 1, n a $2^k + 1$, kde k je najväčšie také celé číslo, že $2^k + 1 < n$. Potom vieme z prvej časti napísať na tabuľu všetky čísla od 1 do $2^k + 1$. Následne vieme nájsť medzi týmito číslami číslo $n - 2^k$. To je už napísané na tabuli a keďže je to len posunutý prípad dvojice 1 a $2^k + 1$, tak vieme dopísať aj všetky čísla medzi $n - 2^k$ a n. Tým pádom nám budú stačiť 3 počiatočné čísla na vygenerovanie ostatných.

(Martin Kopčány)

Úloha C3. *Rozhodněte, pro která přirozená čísla $n > 1$ existuje $2n$ bodů v rovině $P_1, \dots, P_n$, $Q_1, \dots, Q_n$ s následujícími vlastnostmi:*

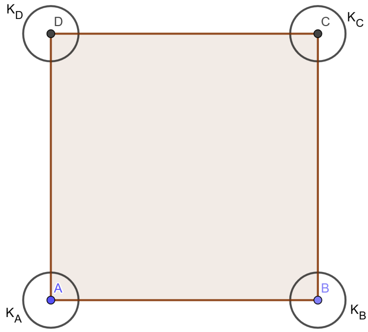
1. *Žádné tři z nich neleží na jedné přímce.*
2. *Pro každé i od 1 do n platí $|P_iP_{i+1}| \ge 1$, kde $P_{n+1} = P_1$.*
3. *Pro každé i od 1 do n platí $|Q_iQ_{i+1}| \ge 1$, kde $Q_{n+1} = Q_1$.*
4. *Pro každé i a j od 1 do n platí $|P_iQ_j| \le 1$.*

Řešení. Najprv ukážeme, že pre n párne takých $2n$ bodov v rovine existuje. Nech $n = 2k$, kde $k \in \mathbb{N}$. Nech $ABCD$ je štvorec so stranou dĺžky $2(\sqrt{2} - 1)$. Pre bod $V \in \{A, B, C, D\}$ označme K_V kruh so stredom V a polomerom $r = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$.

V kruhu K_A teraz zvolíme body $P_1, P_3, \dots, P_{2k-1}$, v kruhu K_B body $Q_1, Q_3, \dots, Q_{2k-1}$, v kruhu K_C body $P_2, P_4, \dots, P_{2k}$ a v kruhu K_D body $Q_2, Q_4, \dots, Q_{2k}$ tak, aby žiadne tri z týchto bodov neležali na jednej priamke.[1]

Ukážeme, že tieto body spĺňajú požadované vlastnosti:

[1] Prvé dva body zvolíme ľubovolne. Nech máme už nejaké body zvolené a nech chceme zvoliť napr. bod $P_8 \in K_C$. Každá dvojica už zvolených bodov udáva „zakázanú” priamku, kde P_8 nesmie ležať. Nech teraz q je priamka prechádzajúca bodom D, rôznobežná so všetkými zakázanými priamkami. Každá zakázaná priamka na priamke q určuje jeden „zakázaný bod”, kam P_8 nemôžeme umiestniť. Zakázaných bodov je teda konečne veľa, no prienik $q \cap K_D$ je nekonečný, takže v ňom leží aspoň jeden nezakázaný bod.



1. Body $P_1, \ldots, P_n$ a $Q_1, \ldots, Q_n$ sme volili tak, aby žiadne tri neležali na jednej priamke.
2. Nech $i \in \{1, \ldots, n\}$. Jeden z bodov P_i a P_{i+1} leží v kruhu K_A a ten druhý v kruhu K_C, bez ujmy na všeobecnosti $P_i \in K_A$. Platí potom (z n-uholníkovej nerovnosti)

$$|P_iP_{i+1}| \geq |AC| - |AP_i| - |CP_{i+1}| \geq a\sqrt{2} - 2r = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} - 2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = 1.$$

3. Analogicky k bodu 2.
4. Nech $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Bez ujmy na všeobecnosti $P_i \in K_A$ a $Q_j \in K_B$. Potom

$$|P_iQ_j| \leq |P_iA| + |AB| + |BQ_j| \leq a + 2r = 2(\sqrt{2}-1) + 2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right) = 1.$$

Pre n párne teda takých $2n$ bodov v rovine existuje.

Teraz ešte dokážeme, že pre nepárne n takých $2n$ bodov neexistuje.

Pre spor nech $n = 2m - 1$ je nepárne a $P_1, \ldots, P_n$ a $Q_1, \ldots, Q_n$ sú body v rovine spĺňajúce podmienky 1. až 4. zo zadania.

Označme K_1 a K_2 (uzavreté) jednotkové kruhy so stredmi postupne P_1 a P_2. Ďalej označme k_1 a k_2 jednotkové kružnice so stredmi postupne P_1 a P_2.

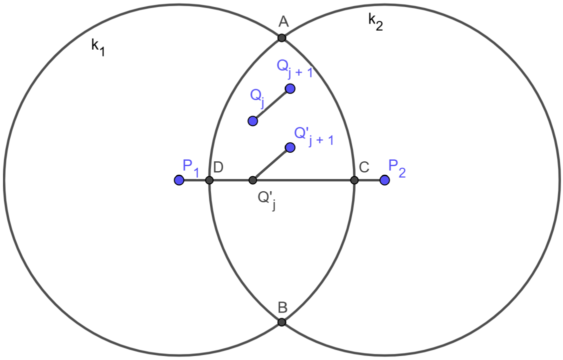
Z podmienky 4. vyplýva, že $Q_j \in K_1 \cap K_2$ pre každé $j \in \{1, \ldots, n\}$. Pretože body Q_1 a Q_2 sú navzájom rôzne a oba ležia v prieniku $K_1 \cap K_2$, kružnice k_1 a k_2 sa nutne pretínajú v dvoch bodoch. Označme A a B priesečníky kružníc k_1 a k_2. Ďalej označme C priesečník kružnice k_1 s úsečkou P_1P_2 a D priesečník kružnice k_2 s úsečkou P_1P_2.

Lemma 1. *Nech $j \in \{1, \ldots, n\}$. Body Q_j a Q_{j+1} neležia v tej istej polrovine určenej priamkou P_1P_2.*

Důkaz. Pre spor nech Q_j a Q_{j+1} ležia v tej istej polrovine. Bez ujmy na všeobecnosti, nech je to tá polrovina určená priamkou P_1P_2, ktorá obsahuje bod A. Ďalej bez ujmy na všeobecnosti nech vzdialenosť Q_j od priamky P_1P_2 je nanajvýš taká ako vzdialenosť Q_{j+1} od priamky P_1P_2.

Označme Q'_j kolmý priemet Q_j na priamku P_1P_2 a Q'_{j+1} obraz bodu Q_{j+1} v posunutí o orientovanú úsečku $Q_jQ'_j$. Platí $Q'_j, Q'_{j+1} \in K_1 \cap K_2$, Q'_j je vnútorný bod úsečky CD a $|Q_jQ_{j+1}| = |Q'_jQ'_{j+1}|$.

Pretože $|\sphericalangle Q'_{j+1}Q'_jP_1| + |\sphericalangle Q'_{j+1}Q'_jP_2| = 180°$, jeden z uhlov $\sphericalangle Q'_{j+1}Q'_jP_1$ a $\sphericalangle Q'_{j+1}Q'_jP_2$ má veľkosť aspoň $90°$. Bez ujmy na všeobecnosti $|\sphericalangle Q'_{j+1}Q'_jP_1| \geq 90°$. Potom v trojuholníku



$Q'_{j+1}Q'_jP_1$ musí oproti uhlu $\sphericalangle Q'_{j+1}Q'_jP_1$ ležať najdlhšia strana (toto platí aj ak je trojuholník $Q'_{j+1}Q'_jP_1$ degenerovaný), a teda

$$|Q_jQ_{j+1}| = |Q'_jQ'_{j+1}| < |P_1Q'_{j+1}| \leq 1,$$

čo je spor s podmienkou 3. zo zadania. □

Z lemmy 1 vyplýva, že body $Q_1, Q_3, \ldots, Q_{2m-1}$ ležia v tej istej polrovine určenej priamkou P_1P_2. Aplikovaním lemmy 1 na $j = n = 2m - 1$ dostávame, že body Q_1 a Q_{2m-1} neležia v tej istej polrovine určenej priamkou P_1P_2, čo je spor. Pre n nepárne teda neexistuje takých $2n$ bodov v rovine, čo by spĺňali podmienky 1. až 4. zo zadania.

Záver. *$2n$ bodov v rovine $P_1, \ldots, P_n, Q_1, \ldots, Q_n$ spĺňajúcich body 1. až 4. zo zadania existuje pre párne n.*

(Matej Vasky)

Úloha G3. *Střed strany BC ostroúhlého trojúhelníku ABC označíme M. Paty kolmic z M na AC a AB postupně označíme E a F. V rovině leží body X a Y tak, že $\triangle XEC \sim \triangle CEY$ a $\triangle BYF \sim \triangle XBF$ (trojúhelníky jsou podobné v tomto pořadí) a zároveň ani jeden z bodů E, F neleží na přímce XY. Dokažte, že XY je kolmá na AM.*

Řešení. Označme P,Q päty výšiek postupne z vrcholov B,C v trojuholníku ABC. Zadané podobnosti nám hovoria, že E je C-Dumpty bod v trojuholníku XYC. Následne jedna známa vlastnosť Dumpty bodu hovorí, že obraz C v stredovej súmernosti podľa E leží na kružnici opísanej XYC. Tento bod je zároveň aj bod P z jednoduchej rovnoľahlosti. Teda $XYCP$ ležia na kružnici analogicky aj $XYBQ$.Nezabúdajme pritom ani na kružnicu $PQBC$. Predpokladajme pre spor,že spomenuté tri kružnice sú navzájom rôzne. Následne ich potenčný stred je bod A ako priesečník priamok BQ a PC. Následne ale A musí ležať aj na priamke XY ako chordále poslednej dvojice kružníc. Všimnime si, že zadané podobnosti nám hovoria, že $|\angle XEC| = |\angle YEC|$ respektíve, že $|\angle XEA| = |\angle YEA|$. Teda bod A leží na ose uhla XEY, čiže je vo vnútri úsečky XY. Následne ak sa pozrieme na trojuholník XYC tak úsečka AC je celá v jeho vnútri spolu s bodom P, ktorý má ležať na kružnici opísanej, čo nám dáva želaný spor. Teda niektoré dve z kružníc splynú ale to nám už automaticky dáva tetivový šesťuholník $BCXYPQ$ so stredom v bode M. Veďme dotyčnice k tejto kružnici v bodoch X,Y tie sa musia pretnúť s priamkami CE a BF v jednom bode, keďže sú to symediány v XYB a XYC. Týmto bodom je bod A. Teda X,Y sú body dotyku dotyčníc vedených z bodu A ku kružnici na priemerom BC z čoho už plynie dokazované tvrdenie. *(Adam „Džavo“ Džavoronok)*

Úloha A3. *Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí*

$$f(xf(y)) + f(y) = f(x + y) + f(xy).$$

Řešení.

Zadaniu vyhovujú funkcie $f(x) = x + 1$ a $f(x) = c$ pre všetky reálne c. Dosadením ľahko overíme, že tieto funkcie naozaj vyhovujú. Dokážeme, že ostatné funkcie zadanie nespĺňajú. Predpokladajme, že f nie je konštantná.

Lemma 2. *Pokiaľ je f periodická, tak už je nutne konštantná.*

Důkaz. Nech má f periódu p. Dosadením $(x, y + p)$ dostávame:

$$f(xf(y + p)) + f(y + p) = f(x + y + p) + f(x(y + p)).$$

Porovnaním s pôvodnou rovnicou a využitím $f(y) = f(y + p)$ dostávame:

$$f(xy) = f(xy + xp).$$

Dosadením $(\frac{x}{p}, 0)$ do predchádzajúcej rovnice dostávame, že f je konštantná. □

Lemma 3. *Platí*

$$f(f(x) + y) = f(x + f(y)) \tag{1}$$

Důkaz. Dosadením $(f(x), y)$ dostávame:

$$f(f(x)f(y)) + f(y) = f(f(x) + y) + f(f(x)y) = f(f(x) + y) + f(x + y) + f(xy) - f(x).$$

Teda:

$$f(f(x)f(y)) + f(y) + f(x) = f(f(x) + y) + f(x + y) + f(xy),$$

čo je symetrický vzťah až na $f(f(x) + y)$. Zámenou x za y preto dostávame $f(f(x) + y) = f(x + f(y))$. □

Lemma 4. *Platí $f(f(y)) = f(y + 1)$.*

Důkaz. Dosadíme $(1, y)$ do pôvodnej rovnice. □

Lemma 5. *Platí $f(0) = 1$.*

Důkaz. Dosadením $(x - 1, 0)$ do (1) a využitím lemmy 3 dostávame:

$$f(x) = f(f(x - 1)) = f(x - 1 + f(0)).$$

Funkcia je teda periodická s periódou $f(0) - 1$, teda podľa lemmy 1 platí $f(0) = 1$. □

Lemma 6. *Platí $f(x + 1) = f(x) + 1$.*

Důkaz. Z lemmy 3 vyplýva, že ak $f(x_1) = f(x_2)$, tak aj $f(x_1 + 1) = f(x_2) + 1$. Aplikovaním do (1) dostávame:

$$f(x + f(y) + 1) = f(f(x) + y + 1).$$

Dosadením $(x + 1, y)$ do (1) dostávame:

$$f(f(x + 1) + y) = f(x + 1 + f(y)) = f(f(x) + y + 1).$$

Dosadením $(x, y - f(x) - 1)$ do rovnice vyššie dostávame:

$$f(y + f(x + 1) - f(x) - 1) = f(y).$$

Teda f je periodická s periódou $f(x + 1) - f(x) - 1$, preto $f(x + 1) = f(x) + 1$. □

Lemma 7. *Platí* $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Důkaz. Z lemmy 4 a lemmy 5 vyplýva $f(-1) = 0$. Stačí ukázať implikáciu zľava doprava. Nech $f(a) = 0$. Dosaďme (x, a) do pôvodnej rovnice. Dostaneme:

$$1 = f(x + a) + f(xa). \tag{2}$$

Špeciálne, ak dosadíme $a = -1$ do (2), dostávame $1 = f(x - 1) + f(-x)$. Podľa lemmy 5:

$$f(x) + f(-x) = 2. \tag{3}$$

Predpokladajme existenciu $a \neq -1$. Dosaďme $x = -\frac{a}{a+1}$. Potom $x + a = -xa$, teda $f(x + a) + f(xa) = 2$, čo je spor.

□

Lemma 8. *Platí* $f(x) = x + 1$.

Důkaz. Dosaďme $(x, -f(x) - 1)$ do (1). Dostaneme:

$$0 = f(-1) = f(x + f(-f(x) - 1)).$$

Podľa lemmy 6 potom $x + f(-f(x) - 1) = -1$. Podľa lemmy 5 platí $x + f(-f(x)) = 0$. Podľa (3) potom $x + 2 - f(f(x)) = 0$. Z lemmy 3 potom vyplýva $x + 2 = f(x + 1)$, teda $f(x) = x + 1$. □

Poznámky opravujícího.

K riešeniu sa dalo dostať veľa rôznymi cestami. Všetkých 8 správnych riešení zvolilo navzájom rôzne cesty. Väčšina však využívala vzťah $f(f(x) + y) = f(x + f(y))$.

(Jakub „Šošo“ Šošovička)