Mezinárodní korespondenční seminář

iKS

Medzinárodný korešpondenčný seminár

1. ročník
2011 / 2012

web: *www.kms.sk/iks* e-mail: *iks@kms.sk*

# Zadanie 4. série

**Termín odoslania:** 20. februára 2012

**Adresa pre odoslania:**
*KMS – iKS*
*OATČ KAGDM FMFI UK*
*Mlynská dolina*
*842 48 Bratislava*
*Slovenská republika*

**Úloha A4.** Nech $a, b, c$ sú kladné reálne čísla. Dokážte, že platí

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 \leq 3\big(a^2+ab+b^2\big)\big(b^2+bc+c^2\big)\big(c^2+ca+a^2\big)$$

**Úloha C4.** Nech $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ je preusporiadanie čísel $0, 1, \ldots, n$. *Ťahom* nazývame výmenu čísel $a_i$ a $a_j$, ak sú súčasne splnené podmienky $a_i = 0$, $i > 0$ a $a_{i-1} + 1 = a_j$. Pre ktoré $n$ sa dá konečným počtom ťahov z usporiadania $(1, n, n-1, \ldots, 3, 2, 0)$ vyrobiť usporiadanie $(1, 2, \ldots, n, 0)$?

**Úloha G4.** Nech $ABCD$ je štvoruholník vpísaný do kružnice $k$, body $E$, $F$, $G$, $H$ sú stredy oblúkov $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ kružnice $k$, ktoré neobsahujú zvyšné body, a platí $|AC| \cdot |BD| = |EG| \cdot |FH|$. Dokážte, že priamky $AC$, $BD$, $EG$, $FH$ sa pretínajú v jednom bode.

**Úloha N4.** Nech $p \geq 5$ je prvočíslo a $n = \frac{2^{2p}-1}{3}$. Ukážte, že $n$ delí $2^n - 2$.