Zadanie 2. série

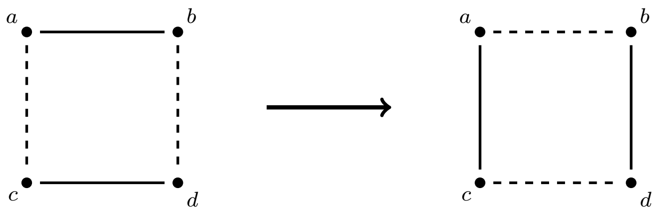
Termín odoslania: 28. jún 2021

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha G2. V rovine leží štvoruholník $ABCD$, v ktorom platí $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle BCD|$ a tiež $|DA| = |DC|$. Na strane AB je zvolený bod E tak, že $|BE| = |DA|$. Dokážte, že priamka CE je osou uhla $\sphericalangle BCD$.

Úloha N2. Je dané celé číslo a_1, z ktorého je ďalej definovaná nekonečná postupnosť celých čísel predpisom $a_{n+1} = a_n^2 - a_n - 1$ pre každé prirodzené n. Dokážte, že pre každé prirodzené n je a_{n+1} nesúdeliteľné s $2n + 1$.

Úloha C2. *Operáciou* na grafe G rozumieme nasledujúci úkon: vezmeme štyri jeho vrcholy a, b, c, d také, že existujú hrany $\{a, b\}$, $\{c, d\}$, zatiaľ čo hrany $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ neexistujú, a hrany $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ zmažeme a naopak $\{a, c\}$, $\{b, d\}$ prikreslíme.



Sú dané dva grafy G_1, G_2 na rovnakej množine vrcholov a v oboch platí, že každý vrchol má stupeň 100. Dokážte, že niekoľkými (konečne veľa) operáciami dokážeme G_1 previesť na G_2.

Úloha A2. Nech $\mathbb{R}[x]$ značí množinu polynómov s reálnymi koeficientmi. Nájdite všetky zobrazenia $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, ktoré spĺňajú nasledujúce podmienky:

(i) Platí $\varphi(0) = 0$.

(ii) Pre každý nenulový polynóm $p \in \mathbb{R}[x]$ platí $\deg(\varphi(p)) \leq 1 + \deg p$, kde deg značí stupeň polynómu.

(iii) Pre ľubovoľné reálne číslo s a ľubovoľné polynómy $p, q \in \mathbb{R}[x]$ platí $p(s) = (\varphi(q))(s)$ práve vtedy, keď $q(s) = (\varphi(p))(s)$. Slovne: polynómy p a $\varphi(q)$ nadobúdajú v (reálnom) bode s rovnakých hodnôt práve vtedy, keď q a $\varphi(p)$ nadobúdajú v s rovnakých hodnôt.