# Zadanie 6. série

**Termín odoslania:** 1. február 2021

**Adresa submitka:** `www.iksko.org/submit`

**Úloha A6.** Sú dané nezáporné reálne čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Dokážte, že

$$\frac{1}{1+a_1} + \frac{a_1}{(1+a_1)(1+a_2)} + \frac{a_1a_2}{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)} + \cdots + \frac{a_1 \cdots a_{n-1}}{(1+a_1)\cdots(1+a_n)} \leq 1.$$

**Úloha N6.** Nazvime prirodzené číslo $n$ *mocninové*, ak $n = x^k$ pre nejaké prirodzené čísla $x$, $k$, kde $k \geq 2$. Nech je $a_1, a_2, a_3, \ldots$ rastúca postupnosť, v ktorej sú zoradené všetky mocninové čísla. Dokážte, že pre nekonečne veľa indexov $i$ je $a_{i+1} - a_i$ násobkom 2021.

**Úloha G6.** V trojuholníku $ABC$ sa vpísaná kružnica dotýká strán $BC$, $CA$, $AB$ v bodoch $D$, $E$, $F$. Nech je $\omega_a$ kružnica so stredom v $A$ a prechádzajúca bodom $D$; analogicky potom definujme kružnice $\omega_b$, $\omega_c$. Dokážte, že ortocentrum trojuholníka $DEF$ má rovnakú mocnosť ku všetkým trom kružniciam $\omega_a$, $\omega_b$, $\omega_c$.

**Úloha C6.** V rovine leží niekoľko obdĺžnikov, ktorých strany sú rovnobežné so súradnicovými osami a ktoré spĺňajú nasledujúcu vlastnosť: pre ľubovoľné dva obdĺžniky $A$, $B$ existuje vodorovná alebo zvislá priamka, ktorá pretína[1] $A$ aj $B$. Dokáž, že je možné zvoliť jednu vodorovnú a jednu zvislú priamku tak, aby každý obdĺžnik bol pretnutý aspoň jednou z nich.

[1] Aby priamka pretínala obdĺžnik, stačí, aby iba obsahovala jeho stranu.