Zadanie 6. série

Termín odoslania: 17. mája 2012

Adresa pre odoslania: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovenská republika

Úloha N6. Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré existujú také celé čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k > 3$, že

$$n = n_1 n_2 \ldots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\ldots(n_k-1)} - 1.$$

Úloha A6. Majme prirodzené číslo $n \geq 2$. Koľko riešení má systém rovníc

$$\begin{aligned} x_1 + x_n^2 &= 4x_n \\ x_2 + x_1^2 &= 4x_1 \\ &\vdots \\ x_n + x_{n-1}^2 &= 4x_{n-1} \end{aligned}$$

pre nezáporné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

Úloha G6. Body I a H sú v tomto poradí stred kružnice vpísanej a ortocentrum ostrouhlého trojuholníka ABC. Body B_1 a C_1 sú postupne stredy strán AC a AB. Vieme, že polpriamka B_1I pretína stranu AB v bode B_2 ($B_2 \neq B$), polpriamka C_1I pretína predĺženie strany AC v bode C_2. Priamky B_2C_2 a BC sa pretínajú v bode K a bod A_1 je stredom kružnice opísanej trojuholníku BHC. Dokážte, že tri body A, I a A_1 ležia na jednej priamke práve vtedy, keď sa rovnajú obsahy trojuholníkov BKB_2 a CKC_2.

Úloha C6. Nech M je množina n bodov v rovine, pre ktorú platí:

(i) dá z nej vybrať 7 bodov, ktoré sú vrcholmi konvexného sedemuholníka,
(ii) pre každých 5 bodov z M, ktoré sú vrcholmi konvexného päťuholníka, je v M aspoň jeden bod ležiaci vo vnútri tohto päťuholníka.

Nájdite najmenšie možné n.