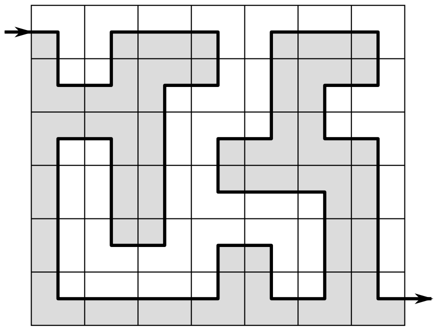
Řešení 4. série

Úloha C4. *Patrik si nakreslil obdélníkovou mřížku a na ní vyznačil nějakou cestu, která začíná vlevo nahoře, končí vpravo dole a každým vrcholem projde právě jednou. Posléze Patrik vybarvil ty oblasti (oddělené onou cestou), které přiléhají k levé nebo spodní hraně tabulky. Dokažte, že vybarvených políček je stejně jako nevybarvených.*

Řešení. Šířku tabulky označíme x a výšku y. Každé políčko je na jedné straně od cesty – buď leží v oblasti sousedící s levým nebo dolním okrajem nebo v oblasti sousedící s pravým nebo horním okrajem. Stačí ukázat, že počet vybarvených políček nezávisí na tom, kudy vedeme cestu. Potom totiž vyjde počet vybarvených políček stejně jako když cestu otočíme o 180°, ale tím spočteme počet nevybarvených políček. Ukážeme si dva přístupy, jak tuto „nezávislost na tvaru cesty“ dokázat.

Procházkové řešení

Poupravíme mřížku tak, že nakreslíme políčko okolo každého vrcholu původní mřížky. Potom máme cestu, která začíná uprostřed levého horního políčka, končí oprostřed pravého dolního políčka a prochází právě jednou každým prostředkem políčka. Nakonec ještě k cestě připojíme vodorovnou část ke konci a začátku vedoucí směrem k okraji. A doobarvíme nové části vlevo dole pod cestou. Tato přidaná doobarvená oblast nezávisí na cestě (a její obsah je roven $\frac{x+y+1}{2}$ políček).



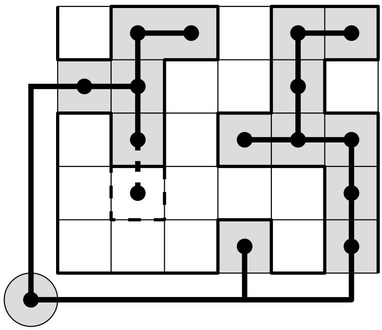
Představíme si, že začneme vlevo nahoře a projdeme celou cestu až na konec. Pak budeme mít obarvenou oblast vždy napravo od sebe a v každém políčku půjdeme rovně, zahneme doprava nebo zahneme doleva. Počet políček, ve kterých půjdeme rovně označme a a počet políček, ve kterých zahneme doleva označme b. Pak rovněž počet políček, ve kterých zahneme doprava musí být roven b, protože končíme stejně orientovaní jako na začátku a cesta se neprotíná. Celkovou obarevnou oblast sečteme přes všechna políčka:

$$\frac{1}{2}a + \frac{3}{4}b + \frac{1}{4}b = \frac{1}{2}(a + 2b) = \frac{1}{2}(x + 1)(y + 1).$$

Tedy tento obsah nezávisí na cestě.

Odebírací řešení

Sestavíme graf z obarvených políček. Dvě obarvená políčka spojíme hranou, právě když hranou sousedí. Nakonec přidáme jedno virtuální obarvené políčko odpovídající levému dolnímu okraji mřížky. Takto sestavený graf je souvislý (jinak by některá obarvená políčka musela být ze všech stran obklopená Patrikovou cestou) nemá kružnice (jinak by tato kružnice uzavírala body, kudy nemohla vést Patrikova cesta).



Je to tedy strom a strom má vždy alespoň dva listy – tedy má alespoň jeden list různý od virtuálního políčka. Budeme tedy tomuto stromu postupně odebírat listy, než zbude pouze ono virtuální políčko a při každém odebrání upravíme cestu tak, aby vedla stále kolem toho stromu. To znamená, že když ze stromu odebereme políčko, povede cesta přes jednu hranu tohoto políčka, zatímco před odebráním vedla přes 3 hrany, zbytek cesty se nezmění. Při každém odebrání tak ubude jedno obarvené políčko a 2 hrany cesty. Abychom spočetli obarvená políčka na začátku, stačí určit rozdíl délky cesty na začátku a na konci odebírání a vydělit tento rozdíl dvěma. Na začátku má cesta délku o 1 kratší než je počet vrcholů, tedy $(x+1)(y+1)-1$ (nezávisí na tvaru cesty) a na konci vede rovně dolů a pak rovně doprava, tedy má délku $x+y$ (nezávisí na původním tvaru cesty), takže počet vybarvených políček také nezávisí na tvaru cesty.

Poznámky opravujícího. U úloh s protínajícími se křivkami často není jasné, které tvrzení považovat za zřejmé a které už se musí dokazovat – ostatně už jen dokázat, že uzavřená spojitá křivka v rovině dělí tuto rovinu na právě dvě části[1], je dost obtížné. Rozhodl jsem se ale „neprudit“ a uznával jsem například i tvrzení „musíme zatočit stejněkrát doleva jako doprava“ (použité v procházkovém přístupu). Pokud bychom chtěli toto formálně dokazovat, jedna z možností by byla definovat zamotanost následovně: Veďme polopřímku napravo od naší aktuální pozice na cestě. Tato polopřímka byla dosud překročena p-krát dopředu a z-krát dozadu. Zamotanost definujeme jako $p-z$. Pak je možné ukázat, že pokud se 4-krát otočíme doleva, zamotanost se zvýší o 1, zatímco pokud se 4-krát otočíme doprava, zamotanost klesne o 1.

Jinak byla úloha snadná – skoro jakýkoli přístup k ní vedl k řešení. Krom výše uvedených přístupů někteří řešitelé použili součet vnitřních úhlů v n-úhelníku či Pickovu formuli.

Namísto úvodního odstavce, že stačí ukázat nezávislost obsahu na tvaru cesty samozřejmě stačilo tento obsah přesně spočítat a dospět k $\frac{xy}{2}$ – jak procházkový přístup, tak odebírací dává jasný návod, jak na to.

(Mirek Olšák)

Úloha G4. *Osa úhlu u vrcholu A trojúhelníka ABC protíná stranu BC v bodě D. Označme M střed úsečky AD. Úsečky MB, MC protnou kružnice s průměry AC, AB postupně v bodech X, Y. Dokažte, že body D, M, X, Y leží na jedné kružnici.*

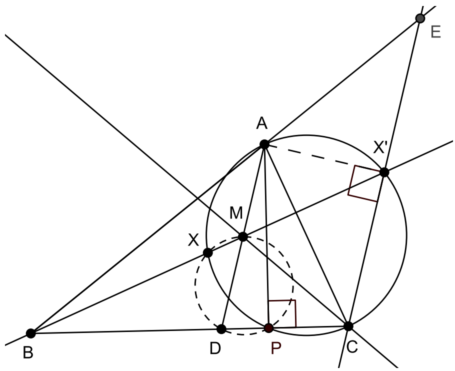
Řešení. Označme průsečíky přímek BA a BM s rovnoběžkou s AD vedenou bodem C po řadě E a X'. Díky rovnoběžnosti a tomu, že $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \frac{\alpha}{2}$, snadno dostáváme $\sphericalangle AEC = \sphericalangle ECA = \frac{\alpha}{2}$. Bod X' je zřejmě středem úsečky CE, takže AE je těžnice (ta správná) v rovnoramenném trojúhelníku, tedy $\sphericalangle AX'C = 90^\circ$ a X' leží na Thaletově kružnici nad AC

[1] Toto tvrzení se nazývá Jordanova věta, viz článek „Jordan curve theorem“ anglické Wikipedie.

(říkejme jí τ). Označme patu A-výšky, která zřejmě leží na τ, jako P. Nyní z mocnosti bodu B ke kružnici τ dostáváme

$$BX \cdot BX' = BP \cdot BC \Rightarrow \frac{BX}{BP} = \frac{BC}{BX'} = \frac{BD}{BM} \Rightarrow BX \cdot BM = BP \cdot BD,$$

kde třetí rovnost plyne z faktu $MD \parallel CX'$. Z toho opět pomocí mocnosti dostáváme, že body X, M, P, D leží na jedné kružnici. Pokud body B a P splynou (jedině to by znemožnilo úpravu na zlomky výše), je úhel ABC pravý a platí $P \equiv B \equiv X$, tvrzení platí i v tomto případě. Analogicky bychom dokázali, že body Y, M, P, D leží na jedné kružnici. Pokud $AB \neq AC$, pak body P a D nesplývají, čili obě zmíněné čtveřice bodů leží na kružnici opsané trojúhelníku MPD. V opačném případě body P a D splynou a obě zmíněné čtveřice leží na kružnici procházející bodem M, která se v bodě $P \equiv D$ dotýká přímky BC. V obou případech leží body X, Y, M, D na jedné kružnici, což jsme měli dokázat.



Poznámky opravujícího. Úloha byla standardní a velká většina došlých řešení byla správně. Nejčastějším prohřeškem bylo opomenutí degenerovaného případu, kdy $P \equiv D$, za což jsme strhávali jeden bod. Obvykle řešitelé postupovali obdobně jako ve vzorovém řešení, několikrát se objevilo celkem vtipné použití kruhové inverze, vyskytla se i barycentrika a třeba harmonické čtveřice. Poměrně často byla řešení (zvlášťě ta podobná vzorovému) dost dlouhá a přitom šlo třeba i několik odstavců nahradit jedinou větou bez újmy na správnosti. Až příště vyřešíte nějakou úlohu, zkuste se zamyslet nad tím, zda jsou všechny kroky, které vaše řešení obsahuje, opravdu potřeba[2]. Může pomoct se na řešení podívat od konce a v každé fázi si říct: „Fajn, tohle potřebuju, ale neumím to dokázat nějak rychle a přímočaře skoro ze zadání?“

(Jakub Svoboda a David Hruška)

Úloha N4. *Je dáno liché prvočíslo p a posloupnost splňující $a_n = a_{n-1} + a_{n-p}$ pro $n \geq p$ a $a_n = n$ pro $n = 0, \ldots, p-1$. Kolik z čísel $a_0, a_1, \ldots, a_{p^3}$ je dělitelných p?*

Řešení. Nejprve bych zmínil, že v celém řešení budu vše indexovat od nuly.

[2] tj. nejsou to proslulé cimrmanovské „kroky stranou“

Zřejmě nám stačí posloupnost počítat modulo p a zkoumat počet nul v této posloupnosti. Celou dobu tedy budeme pracovat nad tělesem $\mathbb{Z}_p$.[3]

Snadno si všimneme, že pokud si budeme psát členy posloupnosti do tabulky, která má p sloupců, tak každé políčko (s výjimkou políček v prvním sloupci) bude součtem políček vlevo od něj a nad ním. Zde je taková tabulka pro $p = 7$ s prvními p^2 členy naší posloupnosti.

0	1	2	3	4	5	6
6	0	2	5	2	0	6
5	5	0	5	0	0	6
4	2	2	0	0	0	6
3	5	0	0	0	0	6
2	0	0	0	0	0	6
1	1	1	1	1	1	0

Vidíme, že následující členy by byli postupně $1, 2, \ldots, (p-1)$ a tedy by posloupnost byla periodická s periodou $p^2 - 1$. Uděláme tedy dva kroky. Jednak dokážeme, že posloupnost je opravdu s touto periodou periodická a poté spočítáme, kolik je nul v rámci jedné periody. K obojímu nám pomůže určit vzorec pro prvních p^2 členů.

Posloupnost bychom mohli počítat i dozadu a tak bychom si mohli přidat ještě jeden řádek nahoru, tvořený samými jedničkami. Podobně bychom si mohli přidat nový sloupec doleva, který by byl naopak tvořený čísly -1 (podobně jako poslední sloupec). Pak už jsou všechna čísla v tabulce určená jen tímto přidaným řádkem a sloupcem a vlastností, že v políčku je součet čísel v políčku vlevo od něj a v políčku nad ním. Nyní už si snadno tipneme, že posloupnost dostaneme jako rozdíl dvou Pascalových trojúhelníků:

	1	1	1	1	1	1	1
- 1	1 - 1	2 - 1	3 - 1	4 - 1	5 - 1	6 - 1	0 - 1
- 1	1 - 2	3 - 3	6 - 4	3 - 5	1 - 6	0 - 0	0 - 1
- 1	1 - 3	4 - 6	3 - 3	6 - 1	0 - 0	0 - 0	0 - 1
- 1	1 - 4	5 - 3	1 - 6	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0 - 1
- 1	1 - 5	6 - 1	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0 - 1
- 1	1 - 6	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0 - 0	0 - 1
- 1	1 - 0	1 - 0	1 - 0	1 - 0	1 - 0	1 - 0	1 - 1

Označme si číslo na k-té diagonále (bereme diagonály vedoucí „na severovýchod“), které je v pořadí l-té (vlevo dole je 0-té) jako $c_{k,l}$. Pak $c_{k,l} = \binom{k+1}{l} - \binom{k+1}{l+1}$. Podle polohy políčka v tabulce můžeme zformulovat hypotézu $c_{k,l} = a_{(k-l)p+l}$.

Nejprve si ale dokažme několik užitečných vlastností:

(i) $c_{k+p-1,p-1} = -1$ pro $0 \leq k < p-1$.

(ii) $c_{2p-2,p-1} = 0$.

[3] Jinak řečeno pro nás bude všechno sčítání a násobení modulo p. Například budeme psát $(p-1)+2 = 1$ bez nutnosti symbolů $\equiv$ a $\pmod p$. Jiný pohled na věc je, že ztotožníme všechna čísla $kp + l$ pro pevné l.

(iii) $c_{k,l} = -c_{k,k-l}$.

(iv) $c_{l+p-1,l} = 1$ pro $0 \le l < p-1$.

(v) Mějme $b < p-1$. Pak víme, že $\binom{a}{b} = 0$, pokud $a \pmod p < b$.

Důkazy:

(i) $c_{k+p-1,p-1} = \binom{k+p}{p-1} - \binom{k+p}{p} = \frac{(k+p)\cdots(p+1)\cdot p\cdots(k+2)}{(p-1)!} - \binom{k+p}{k} = 0 - 1,$
přičemž $\binom{k+p}{k} = 1$, protože

$$\binom{k+p}{k} = \frac{(k+p)\cdots(p+1)}{k!} = \frac{k\cdots 1}{k!} = 1.$$

(ii) Jako předchozí případ pro $k = p-1$. Druhé kombinační číslo vyjde opět 1, ale první vyjde nyní také 1:

$$\frac{(p-1+p)\cdot(p+1)}{(p-1)!} = \frac{(p-1)\cdots 1}{(p-1)!} = 1.$$

(iii) $c_{k,l} = \binom{k+1}{l} - \binom{k+1}{l+1} = \binom{k+1}{k-l+1} - \binom{k+1}{k-l} = -c_{k,k-l}$

(iv) Důsledek (i) a (iii).

(v) $\binom{a}{b} = \frac{a\cdots(a-b+1)}{b!}$, tedy v čitateli se objeví násobek p, zatímco ve jmenovateli ne.

Nyní si dokažme indukcí podle $k-l$ (pro $0 \le k-l < p, 0 \le l < p$), že $c_{k,l} = a_{(k-l)p+l}$. Pro $k-l = 0$ máme $c_{l,l} = \binom{l+1}{l} - \binom{l+1}{l+1} = l+1-1 = l = a_l$. Nyní předpokládejme $k-l > 0$. Postupujme indukcí podle l. Pro $l = 0$ máme podle (i):

$$\begin{aligned} a_{kp} &= a_{(k-1)p} + a_{(k-1)p+(p-1)} = c_{k-1,0} + c_{k-1+p-1,p-1} = \binom{k}{0} - \binom{k}{1} + (-1) = \\ &= \binom{k+1}{0} - \binom{k+1}{1} = c_{k,0} \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme $l > 0$. Pak

$$\begin{aligned} a_{(k-l)p+l} &= a_{(k-l-1)p+l} + a_{(k-l)p+l-1} = c_{k-1,l} + c_{k-1,l-1} = \\ &= \binom{k}{l} - \binom{k}{l+1} + \binom{k}{l-1} - \binom{k}{l} = \binom{k+1}{l} - \binom{k+1}{l+1} = c_{k,l}. \end{aligned}$$

Tím máme tvrzení dokázáno. Dokažme nyní onu periodicitu. Ze (ii) víme $a_{p^2-1} = 0$ a s využitím (iv) dostáváme indukcí podle $0 < m < p$:

$$a_{p^2-1+m} = a_{p^2-1+(m-1)} + a_{(p-1)p+(m-1)} = m-1+1 = m,$$

takže posloupnost je opravdu periodická s periodou p^2-1.

Nyní spočítejme počet nul mezi $a_0, \dots, a_{p^2-2}$. Tedy zkoumejme, kdy platí $c_{k,l} = 0$ pro $0 \le k-l < p, 0 \le l < p$. Z (i) a (iv) už víme, že se pro $k-l = p-1$ ani pro $l = p-1$ žádná nula nevyskytuje (vyjma $c_{p-1,p-1} = a_{p^2-1}$, která je už ale součástí nové periody). Stačí tedy uvažovat případy $k-l < p-1, l < p-1$.

Rozebereme dva případy. Pokud $k \ge p-1$, tak $\binom{k+1}{l}$ i $\binom{k+1}{l+1}$ je nula protože, $k+1 \ge p$, $k+1 = (k-l)+l+1 \le (p-2)+(p-2)+1 < 2p-1$, takže $k+1$ dává zbytek $k+1-p$ modulo p a $k+1-p = (k-l)+l+1-p \le p-2+l+1-p = l-1 < l < l+1$ a obě kombinační čísla v $c_{k,l}$ jsou tedy nuly podle (v). V tomto případě tedy $c_{k,l} = 0$ a snadno spočítáme, že tento případ odpovídá $(p-2)+\cdots+1=\frac{(p-2)(p-1)}{2}$ (pro každé $p-1\leq k-l\leq 2p-3$ spočítáme počet vyhovujících čísel l) členům naší posloupnosti.

Dále předpokládejme $k<p-1$. Z (iii) ihned plyne, že $c_{k,l}=0$ pro $k=2l$, což je dalších $\frac{p-1}{2}$ nul (jedno nula pro $k=0,\ldots,p-1$).

Nyní už jen dokážeme, že $c_{k,l}\neq 0$ pro $k<p-1$ a $l>\frac{k}{2}$ (pro zbylá l to pak plyne díky (iii)). Máme:

$$\begin{aligned} c_{k,l} &= \binom{k+1}{l}-\binom{k+1}{l+1}=\frac{(k+1)\cdots(k+2-l)}{l!}-\frac{(k+1)\cdots(k+1-l)}{(l+1)!}= \\ &= \frac{(k+1)\cdots(k+2-l)}{(l+1)!}\cdot(l+1-(k+1-l)))=\frac{(k+1)\cdots(k+2-l)}{(l+1)!}\cdot(2l-k), \end{aligned}$$

což je výraz, kde žádný činitel není dělitelný p, díky předpokládaným nerovnostem.

V jedné periodě je tedy nul $\frac{(p-2)(p-1)}{2}+\frac{p-1}{2}=\frac{(p-1)^2}{2}$. Tedy mezi členy $a_0,\ldots,a_{p\cdot(p^2-1)}$ je nul $\frac{p(p-1)^2}{2}$ a mezi členy $a_{p^3-p+1},\ldots,a_{p^3}$, které jsou stejné jako $a_0,\ldots,a_{p-1}$, víme, že je jedna nula.

Tedy hledaný počet čísel dělitelných p je $\frac{p(p-1)^2}{2}+1$.

Poznámky opravujícího. Většina došlých řešení byla správná. Rozhodl jsem se být tentokrát trochu přísnější a strhávat bod za některé nepřesnosti. Nejčastější chybou, na kterou bych chtěl upozornit a na kterou je třeba si dávat pozor, je počítání zlomků modulo p, kde se ve jmenovateli vyskytuje číslo dělitelné p. Pak je potřeba nejprve zkrátit zlomek o nejvyšší mocninu p ve jmenovateli a pak teprve měnit jednotlivé činitele. Na první pohled se může zdát, že úprava $\frac{(2p)\cdot(2p-1)\cdots(p+1)}{p!}\equiv\frac{p\cdot(p-1)\cdots 1}{p!}=1\pmod p$ je v pořádku, ale ve skutečnosti má první zlomek hodnotu 2. Průhlednější je to na příkladu $2=\frac{2p}{p}\equiv\frac{p}{p}=1\pmod p$.

A jelikož jsem byl přísnější na neúplná řešení, tak jsem se rozhodl nedávat bod ani za pouhé tipnutí výsledku nebo periodicity (a za další nedokázaná nebo neužitečná tvrzení).

(Štěpán Šimsa)

Úloha A4. *Nalezněte všechny funkce splňující pro všechna $x,y\in\mathbb{R}$ rovnici*

$$f(f(x)-f(y))=f(f(x))-2x^2f(y)+f(y^2).$$

Řešení. Konstantní nulová funkce zřejmě vyhovuje, a proto nyní předpokládejme, že existuje $t\in\mathbb{R}$ takové, že $f(t)\neq 0$. Dosadíme $y=t$ a vyjádříme x^2:

$$x^2=\frac{f(f(x))+f(t^2)-f(f(x)-f(t))}{f(t)}$$

z čehož plyne, že pokud $f(a)=f(b)$, pak postupným dosazením a,b do x se pravá strana nemění, a proto $a^2=b^2$ neboli $a=\pm b$. Dále dosadíme $x=y=0$:

$$f(f(0)-f(0))=f(f(0))+f(0)\Rightarrow f(f(0))=0$$

Nyní položme $x=0$:

$$f(f(0)-f(y))=f(f(0))+f(y^2)\Rightarrow f(f(0)-f(y))=f(y^2)$$

můžeme tedy vyvodit, že pro $x\in\mathbb{R}$, platí buď $f(0)-f(x)=x^2$ nebo $f(0)-f(x)=-x^2$. K výpočtu hodnoty funkce v bodě 0 stačí do nově získaného vztahu dosadit $x=f(0)$, pak dostaneme:

$$f(0)=f(0)^2\vee f(0)=-f(0)^2$$

Existují tedy pouze 3 možné hodnoty pro $f(0)$, jimiž jsou $0, 1, -1$.

Pokud $f(0) = 0$, pak $f(x) = x^2$ nebo $f(x) = -x^2$, a proto $f(1) = 1$ nebo $f(1) = -1$. V případě $f(1) = 1$ předpokládejme, že existuje nenulové c takové, že $f(c) = -c^2$. Dosadíme $x = c, y = 1$:

$$f(-c^2 - 1) = f(-c^2) - 2c^2 + 1$$

Máme 4 případy podle znaménka hodnot $f(-c^2 - 1)$ a $f(-c^2)$.

$$\begin{aligned} c^4 + 2c^2 + 1 &= c^4 - 2c^2 + 1 \Rightarrow 4c^2 = 0 \Rightarrow c = 0 \\ c^4 + 2c^2 + 1 &= -c^4 - 2c^2 + 1 \Rightarrow 2c^4 + 4c^2 \Rightarrow c = 0 \\ -c^4 - 2c^2 - 1 &= c^4 - 2c^2 + 1 \Rightarrow 0 = 2c^4 + 2 \\ -c^4 - 2c^2 - 1 &= -c^4 - 2c^2 + 1 \Rightarrow 1 = -1 \end{aligned}$$

Celkově jsme ve všech případech došli ke sporu, a proto $f(x) = x^2$ pro každé reálné x. Případ $f(1) = -1$ se vyšetří analogicky a vypadne nám řešení $f(x) = -x^2$.

Pokud $f(0) = 1$, pak $f(x) = 1 + x^2$ nebo $f(x) = 1 - x^2$. Předpokládejme, že $f(c) = 1 + c^2$ platí pro nějaké nenulové c. Dosadíme $x = c, y = 0$:

$$f(1 + c^2 - 1) = f(1 + c^2) - 2c^2 + 1$$

Máme 4 případy podle znaménka hodnot $f(-c^2 - 1)$ a $f(-c^2)$.

$$\begin{aligned} 1 + c^4 &= 1 + (1 + 2c^2 + c^4) - 2c^2 + 1 \Rightarrow 0 = 2 \\ 1 + c^4 &= 1 - (1 + 2c^2 + c^4) - 2c^2 + 1 \Rightarrow 2c^4 + 4c^2 = 0 \Rightarrow c = 0 \\ 1 - c^4 &= 1 + (1 + 2c^2 + c^4) - 2c^2 + 1 \Rightarrow 2c^4 + 2 = 0 \\ 1 - c^4 &= 1 - (1 + 2c^2 + c^4) - 2c^2 + 1 \Rightarrow 0 = -4c^2 \end{aligned}$$

Celkově jsme ve všech případech došli ke sporu, a proto $f(x) = 1 - x^2$ pro každé reálné x. Případ $f(0) = -1$ se vyšetří analogicky a vypadne nám řešení $f(x) = -1 + x^2$.

Dostali jsem 5 kandidátů na řešení $0, x^2, -x^2, 1 - x^2, x^2 - 1$. Zkouškou snadno ověříme, že všechna zmíněná vyhovují původní rovnici

Poznámky opravujícího. Téměr všechna došlá řešení rychle objevila pseudoprostotu a díky ní vztah $f(0) - f(x) = \pm x^2$. Zde se úloha začne větvit do dílčích případů, ale stačí zatnout zuby, nebát se toho a pečlivě rozebírat případy. Chci pochválit řešitele za to, že se nedopustili klasické chyby při řešení funkcionální rovnice, která spočívá ve špatném porozumění vztahu $(f(0) - f(x))^2 = x^4$, z čehož nemusí plynout, že $f(0) - f(x) = x^2$ pro všechna x, nebo $f(0) - f(x) = \pm x^2$ pro všechna x

(Anh Dung „Tonda“ Le)