Řešení 1. série

Úloha A1. Najděte nejmenší kladné reálné číslo t s následující vlastností: kdykoliv reálná čísla a, b, c, d splňují $a+b+c+d=6$ a $a^2+b^2+c^2+d^2=10$, lze z těchto čísel vybrat dvě, jejichž rozdíl je v absolutní hodnotě nejvýše t.

Řešení. Ukážeme, že $t=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Nejprve nalezneme čtveřici čísel vyhovující daným podmínkám, která zároveň tvoří aritmetickou posloupnost. Tou čtveřicí je

$$\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2\sqrt{5}},\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2\sqrt{5}},\ \frac{3}{2}+\frac{1}{2\sqrt{5}},\ \frac{3}{2}+\frac{3}{2\sqrt{5}}\right).$$

Vidíme tedy, že $t \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$. Nyní předpokládejme, že $t > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Existují tedy taková reálná čísla $a>b>c>d$ splňující vztahy ze zadání, že

$$a-b>\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad b-c>\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c-d>\frac{1}{\sqrt{5}}. \tag{$\heartsuit$}$$

Tuto skutečnost dovedeme ke sporu několika způsoby.

První způsob (volně podle Pepy Svobody). Spočítámě hodnotu výrazu

$$V=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2+(d-a)^2.$$

Platí totiž

$$V=3\sum_{\text{cyc}}a^2-2\sum_{\text{sym}}ab=4\sum_{\text{cyc}}a^2-\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)^2=4.$$

Zároveň ale pokud užijeme nerovnosti z ($\heartsuit$), získáme

$$V>\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{9}{5}=4,$$

což je hledaný spor.

Druhý způsob (podle Anh Dung Le). Nejprve si dokážeme několik odhadů. Díky nerovnostem z ($\heartsuit$) platí

$$(a-b)(c-d)>\frac{1}{5} \ \Rightarrow\ ac+bd>\frac{1}{5}+ad+bc$$

a podobně i

$$(a-c)(b-d)>\frac{4}{5} \ \Rightarrow\ ab+cd>\frac{4}{5}+ad+bc.$$

Jejich součtem je pak nerovnost

$$ab+ac+bd+cd>1+2(ad+bc). \tag{$\clubsuit$}$$

Před efektním závěrem si ještě uvědomíme, že

$$2\sum_{\text{sym}}ab=\left(\sum_{\text{cyc}}a\right)^2-\sum_{\text{cyc}}a^2=26$$

a zbytek si s úžasem vychutnáme

$$\begin{aligned}27=1+2(ad+bc)+2(ab+ac+bd+cd) &\overset{(\clubsuit)}{<} 3(ab+ac+bd+cd)=\\ &=3(a+d)(b+c)\overset{\text{AG}}{\leq} 3\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2=27.\end{aligned}$$

Třetí způsob (koncentrovaně podle Viktora Lukáčka). Přejděme k novým proměnným $a_1 = a - \frac{3}{2}$, $b_1 = b - \frac{3}{2}$, $d_1 = d - \frac{3}{2}$, $d_1 = d - \frac{3}{2}$. Nerovnosti typu ($\heartsuit$) se zachovají a snadno spočítáme, že

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1 = 0, \qquad a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 = 1.$$

Uvědomíme si, že AK nerovnost lze psát i ve tvaru

$$x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}(x-y)^2, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

dvakrát ji použijeme

$$1 = \left(a_1^2 + d_1^2\right) + \left(b_1^2 + c_1^2\right) \geq \frac{1}{2}(a_1 - d_1)^2 + \frac{1}{2}(b_1 - c_1)^2 \overset{(\heartsuit)}{>} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{9}{5} + \frac{1}{5}\right) = 1$$

a spor je opět na světě.

Poznámky opravujícího. Úloha sice nebyla zrovna jednoduchá, ale ukázalo se, že ji bylo možné řešit mnoha způsoby. Dokonce se mezi správnými řešeními nenašla žádná dvojice se stejným postupem. Jako nejméně schůdná se ukázala metoda „aritmetickou posloupnost nejde posouváním zlepšit“, kterou úspěšně dovedl do konce jen *Bui Truc Lam Michal.*

(Michal „Kenny“ Rolínek)

Úloha C1. *Mixáží* neuspořádané n-tice celých čísel[1] rozumíme neuspořádanou $\binom{n}{2}$-tici součtů všech dvojic prvků původní n-tice. Ukažte, že pokud mají dvě různé n-tice stejnou mixáž, pak n je mocnina dvojky. Pro každou mocninu dvojky také nalezněte příklad odpovídajících různých n-tic.

Řešení. V celém řešení budeme pomocí závorek $\langle\!| \ldots |\!\rangle$ značit (neuspořádané) n-tice, dále nechť $\mathrm{Mix}(X)$ značí mixáž X.

Ukážeme nejprve, že pokud různé n-tice A, B splňují $\mathrm{Mix}(A) = \mathrm{Mix}(B)$, tak je n mocninou dvojky. BÚNO se můžeme omezit na n-tice nezáporných čísel, protože pokud n-tice A, B vyhovují zadání, pak jistě vyhovují i n-tice $\langle\!| a + m \mid a \in A |\!\rangle$, $\langle\!| b + m \mid b \in B |\!\rangle$ pro libovolné $m \in \mathbb{Z}$.

Nechť $A = \langle\!| a_1, \ldots, a_n |\!\rangle$, $B = \langle\!| b_1, \ldots, b_n |\!\rangle$ jsou různé n-tice se stejnou mixáží. Definujme polynomy $f(x)$, $g(x)$ následovně:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i}, \qquad g(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}.$$

Podmínku $\mathrm{Mix}(A) = \mathrm{Mix}(B)$ můžeme přepsat jako

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{a_i + a_j} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{b_i + b_j},$$

odkud dostáváme

$$f(x)^2 - g(x)^2 = \left(f\left(x^2\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{a_i + a_j} \right) - \left(g\left(x^2\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x^{b_i + b_j} \right) = f\left(x^2\right) - g\left(x^2\right).$$

Protože $A \neq B$, není polynom $f(x) - g(x)$ identicky nulový, můžeme tedy psát

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x)^2 - g(x)^2}{f(x) - g(x)} = \frac{f\left(x^2\right) - g\left(x^2\right)}{f(x) - g(x)}.$$

[1] V n-tici se na rozdíl od množiny mohou čísla opakovat.

Navíc, jelikož $f(1) = g(1) = n$, je 1 kořenem $f(x) - g(x)$, lze tedy psát $f(x) - g(x) = (x-1)^k p(x)$, kde $k \in \mathbb{N}$ a p je polynom splňující $p(1) \neq 0$. Odtud plyne

$$f(x) + g(x) = \frac{f(x^2) - g(x^2)}{f(x) - g(x)} = \frac{(x^2-1)^k p(x^2)}{(x-1)^k p(x)} = (x+1)^k \frac{p(x^2)}{p(x)}$$

a po dosazení $x = 1$ máme

$$2n = f(1) + g(1) = (1+1)^k \frac{p(1^2)}{p(1)} = 2^k,$$

tudíž $n = 2^{k-1}$.

Induktivně sestrojíme pro každou mocninu dvojky příklad n-tic ze zadání. Pro $n = 2$ to jsou třeba $A = \{\!\!\{1, 3\}\!\!\}$ a $B = \{\!\!\{2, 2\}\!\!\}$. Předpokládejme nyní, že máme různé n-tice přirozených čísel $A = \{\!\!\{a_1, \ldots, a_n\}\!\!\}$, $B = \{\!\!\{b_1, \ldots, b_n\}\!\!\}$ se stejnou mixáží, navíc takové, že $1 \in A$, ale $1 \notin B$. Hledané $2n$-tice A', B' definujme následovně:

$$\begin{aligned} A' &= \{\!\!\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1 + 1, b_2 + 1, \ldots, b_n + 1\}\!\!\}, \\ B' &= \{\!\!\{b_1, b_2, \ldots, b_n, a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_n + 1\}\!\!\}. \end{aligned}$$

Opět je $1 \in A'$ a $1 \notin B'$, odkud také dostáváme $A' \neq B'$. Nyní si všimněme, že $\mathrm{Mix}(A')$ se skládá ze tří částí: jednak jde o $\binom{n}{2}$ prvků tvaru $a_i + a_j$, kde $1 \leq i < j \leq n$ (tuto část označíme A'_{aa}), dále o $\binom{n}{2}$-tici A'_{bb} prvků tvaru $(b_i + 1) + (b_j + 1)$ a konečně n^2-tici A'_{ab} prvků tvaru $a_i + (b_j + 1)$. Analogicky můžeme $\mathrm{Mix}(B')$ rozdělit na B'_{bb}, B'_{aa} a B'_{ba}.

Protože A'_{aa} je přesně $\mathrm{Mix}(A)$ a B'_{bb} je zase $\mathrm{Mix}(B)$, platí dle předpokladu $A'_{aa} = B'_{bb}$. Dále $A'_{bb} = \mathrm{Mix}(\{\!\!\{b + 1 \mid b \in B\}\!\!\})$ a $B'_{aa} = \mathrm{Mix}(\{\!\!\{a + 1 \mid a \in A\}\!\!\})$, je tedy jistě také $A'_{bb} = B'_{aa}$. Konečně $A'_{ab} = B'_{ba}$, protože to jsou n^2-tice prvků A' a B' tvaru $a_i + b_j + 1$, dostáváme tedy $\mathrm{Mix}(A') = \mathrm{Mix}(B')$.

Poznámky opravujícího. Patrně šlo o nejtěžší úlohu této série, protože ji správně vyřešil jen *Anh Dung Le* (ale ani on se nevyhnul ztrátě bodu). *Viktor Lukáček* a *Martin Vodička* obdrželi dva body za konstrukci hledaných 2^k-tic. *(Alexander „Olin“ Slávik)*

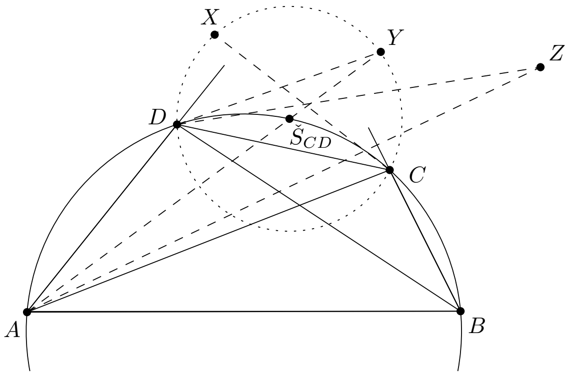
Úloha G1. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Sestrojme středy všech kružnic připsaných trojúhelníkům ABC, BCD, CDA, DAB (tedy celkem 12 bodů). Dokažte, že všechny tyto body leží na obvodu jednoho obdélníka nebo čtverce.

Řešení (podle Martina Vodičky). Označme E_{XYZ} střed kružnice připsané trojúhelníku XYZ vzhledem ke straně XY. Označme α, β, γ, δ obvodové úhly příslušné obloukům AB, BC, CD, DA.

V prvním kroku dokážeme, že $X = E_{CDB}$, $Y = E_{CDA}$ a $Z = E_{BDA}$ leží v tomto pořadí v přímce. Z toho díky analogickým tvrzením okamžitě dostaneme, že všech dvanáct středů připsaných kružnic leží na obvodu čtyřúhelníku s vrcholy E_{BDA}, E_{CAB}, E_{DBC}, E_{ACD}. Ve druhém kroku úlohu dokončíme tím, že ukážeme, že sousední strany tohoto čtyřúhelníku jsou na sebe kolmé.

Opakovaně přitom využijeme následující lemma: Označíme-li $\check{S}_{CD}$ střed kratšího oblouku CD kružnice opsané čtyřúhelníku $ABCD$, pak $\check{S}_{CD}$ je středem kružnice opsané (tětivovému) čtyřúhelníku $DCYX$ (pro důkaz si stačí všimnout, že $|\sphericalangle D\check{S}_{CD}C| = 180° - \gamma$ a $|\sphericalangle DXC| = |\sphericalangle DYC| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$).

1. krok. Ukážeme, že čtyřúhelník $AZYD$ je tětivový. Jelikož DZ a DY jsou osy úhlů, které mají jedno rameno společné, a jejichž druhá ramena svírají úhel BDC, máme $|\sphericalangle ZDY| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BDC| = \frac{1}{2}\beta$. Obdobně dostaneme $|\sphericalangle ZAY| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}\beta$. Čtyřúhelník $AZYD$ je proto opravdu tětivový.

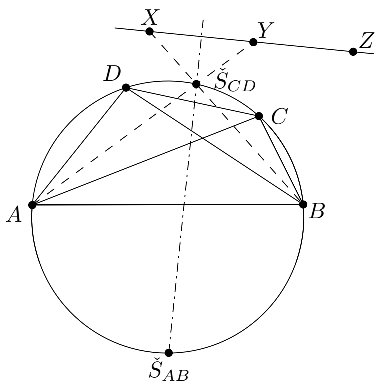


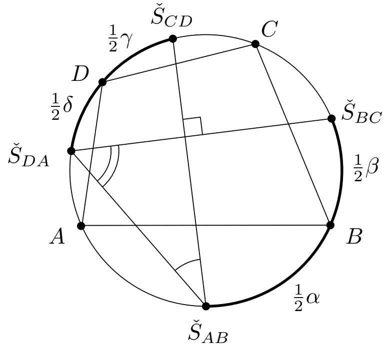
Pomocí toho a lemmatu už snadno odvodíme

$$|\sphericalangle XYZ| = |\sphericalangle XYD| + |\sphericalangle DYZ| = |\sphericalangle XCD| + (180^\circ - |\sphericalangle ZAD|) =$$
$$= \frac{1}{2}(\beta + \gamma) + \left(180^\circ - \frac{1}{2}(\beta + \gamma)\right) = 180^\circ.$$

a jsme hotovi s prvním krokem.

2. krok. Označme ještě $\check{S}_{AB}$, $\check{S}_{BC}$, $\check{S}_{DA}$ středy kratších oblouků AB, BC, DA kružnice opsané $ABCD$.





Jelikož $|\check{S}_{CD}X| = |\check{S}_{CD}Y|$, je přímka XY kolmá na osu úhlu $A\check{S}_{CD}B$, což je přímka $\check{S}_{CD}\check{S}_{AB}$. Pro důkaz, že sousední strany čtyřúhelníku $E_{BDA}E_{CAB}E_{DBC}E_{ACD}$ jsou kolmé, tak stačí dokázat, že $\check{S}_{CD}\check{S}_{AB} \perp \check{S}_{BC}\check{S}_{DA}$. To je ovšem snadné, neboť

$$|\sphericalangle \check{S}_{CD}\check{S}_{AB}\check{S}_{DA}| + |\sphericalangle \check{S}_{AB}\check{S}_{DA}\check{S}_{BC}| = \frac{1}{2}(\gamma + \delta) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = 90^\circ.$$

Poznámky opravujícího. Na úloze bylo zřejmě nejtěžší zorientovat se ve velkém obrázku. Jakmile už člověk zvolil nějaký plán, jak na úlohu, dokončil řešení úspěšně bez kdovíjak hlubokých myšlenek.

Došla celkem čtyři řešení, jimž téměř nebylo co vytknout. Každé z nich se ubíralo jinou cestou. Kromě řešení *Martina Vodičky*, které se stalo podkladem toho vzorového, stojí za zmínku ještě řešení *Josefa Svobody* – ten dokázal, že středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ABC, ABD, ACD, BCD tvoří obdélník, a k tomuto obdélníku postupně „přilepoval“ obdélníky mající za vrcholy různé středy kružnic připsaných.

V jednom řešení se objevila následující hypotéza: Zmiňovaných 12 bodů leží na obvodu čtverce právě tehdy, je-li $ABCD$ čtverec. Jako rozloučení s úlohou si ve volném čase rozmyslete, že tato hypotéza není pravdivá. *(Pepa Tkadlec)*

Úloha N1. Řekneme, že přirozené číslo je *prvoliché*, pokud je součinem lichého počtu (ne nutně různých) prvočísel. O číslu, které není prvoliché, řekneme, že je *prvosudé*. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n takových, že čísla n a $n+1$ jsou obě

(a) prvosudá,

(b) prvolichá.

Řešení (podle Davida Hrušky).

(a) Sporem, předpokládáme, že prvosudých dvojic je konečně mnoho. Tedy najdeme n takové, že již žádná prvosudá dvojice nebude vyšší než n. Dále si uvědomíme, že existuje nekonečně mnoho lichých prvosudých čísel – například sudé mocniny trojky. Najdeme tedy nějaké takové liché prvosudé číslo k, které je větší než $2n$, například tedy $k = 3^{2n}$.

Nyní víme, že $k-1$, k nesmí tvořit prvosudou dvojici. A současně ji nesmí tvořit k, $k+1$. Takže obě čísla $k-1$ a $k+1$ jsou prvolichá a přitom i sudá. Vydělením dvojkou změníme prvoparitu (odebereme jedno prvočíslo) a získáme prvosudou dvojici $\frac{k-1}{2}$, $\frac{k+1}{2}$ větší než n, čímž získáváme spor. Tedy prvosudých dvojic je nekonečně.

(b) Postupujeme obdobně. Najdeme liché prvoliché číslo větší než $2n$, například 3^{2n+1}, čísla kolem něj musí být prvosudá, po vydělení dvěma získáváme prvolichou dvojici.

Poznámky opravujícího. Úloha se ukázala být vcelku lehká, řešitelé k ní přistupovali všelijak a takřka vždy se dostali k cíli. Například *Anh Dung Le* úlohu „zabil“ tím, že Pellova rovnice má nekonečně mnoho řešení. *(Mirek Olšák)*