

Zadanie 4. série

Termín odoslania: 6. november 2023

Adresa submitka: www.iksko.org/submit

Email na otázky: info@iksko.org

Úloha N4. Žirafa si lámala hlavu nad postupnosťou a_1, a_2, a_3, \dots kladných celých čísel, ktorá spĺňa $a_{n+2} = a_{n+1}a_n + 1$ pre všetky kladné celé čísla n . Tak dlho si nad ňou lámala hlavu, až ju mala tak polámanú, že jej musel Michal vytočením čísla 155 zavolať záchranku. Dokážte, že číslo $a_{155} - 155$ je zložené.

Úloha G4. Daný je trojuholník ABC s tupým uhlom pri vrchole B . Označme G a H postupne ťažisko a ortocentrum tohoto trojuholníka. Následne nech kružnica ω s priemerom AG pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode P . Dotyčnica k ω v bode P pretína kružnicu opísanú trojuholníku ABC v bode Q . Dokážte, že ak platí $|AG| = |GH|$, potom $|\angle HQG| = 90^\circ$.

Úloha A4. Majme konečnú postupnosť a_1, a_2, \dots, a_m kladných celých čísel. Dokážte, že existujú nezáporné celé čísla x, y , a N také, že rovnosť

$$\left\lfloor \sum_{i=1}^m \sqrt{n + a_i} \right\rfloor = \lfloor \sqrt{nx + y} \rfloor$$

platí pre všetky $n > N$.

Úloha C4. Džavo našiel v rovine n rôznych bodov. Rozhodol sa, že pôjde merať vzdialenosti medzi nimi. Mal však po ruke iba logaritmické pravítko, preto pre každú dvojicu bodov odmeral ich vzdialenosť ℓ a následne si do zošítka zapísal $\lfloor \log_2 \ell \rfloor$. Dokážte, že po skončení nemal v zošítku viac ako $2n - 2$ rôznych hodnôt.