

## Zadání 3. série

**Termín odeslání:** 25. září 2023  
**Adresa submitka:** [www.iksko.org/submit](http://www.iksko.org/submit)  
**Email pro dotazy:** [info@iksko.org](mailto:info@iksko.org)

**Úloha C3.** Džavo by rád obarvil přirozená čísla třemi barvami. Poté, co je obarví, přijde Šošo, vybere si přirozené číslo a rozdělí jeho dělitele na tři hromádky podle barvy. Rozhodněte, zda Džavo může přirozená čísla obarvit tak, aby se velikosti žádných dvou Šošových hromádek nelišily o více než 1, bez ohledu na to, jaké číslo si Šošo vybral.

**Úloha N3.** Jsou dána celá čísla  $a, b$ , z nichž následně zkonstruujeme rekurentní posloupnost celých čísel danou  $x_0 = x_1 = 0$  a splňující

$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + 1$$

pro všechna  $n \geq 0$ . Dokažte, že pro každé prvočíslo  $p$  je  $\text{NSD}(x_p, x_{p+1})$  buďto roven 1, anebo je větší než  $\sqrt{p}$ .

**Úloha G3.** V ostroúhlém trojúhelníku  $ABC$  označme střed kružnice vepsané  $I$ . Dále necht  $B_1 = BI \cap AC$  a  $C_1 = CI \cap AB$ . Označme  $M, N$  jsou postupně středy  $BI$  a  $CI$ . Body  $K, L$  leží postupně v trojúhelnících  $BIC_1$  a  $B_1IC$ , přičemž splňují  $|\sphericalangle BKI| = |\sphericalangle CLI| = |\sphericalangle BIC|$ ,  $|\sphericalangle BKM| = |\sphericalangle ICB|$ ,  $|\sphericalangle CLN| = |\sphericalangle IBC|$ . Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům  $ABC$  a  $KIL$  mají stejný poloměr.

**Úloha A3.** Je dáno přirozené číslo  $n$  a dále pro každou trojici indexů  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$  číslo  $a_{ijk} \in \{-1, 1\}$ . Dokažte, že lze zvolit tři  $n$ -tice  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n \in \{-1, 1\}$  tak, aby bylo splněno

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ijk} x_i y_j z_k \right| > \frac{n^2}{3}.$$