Řešení 1. série

Úloha C1. *Nech n je prirodzené číslo. Koľkými spôsobmi môžeme rozdeliť? čísla $1, 2, \ldots, 2n+1$ do troch neprázdnych a po dvoch disjunktných množín A, B, C tak, aby súčasne platilo:*

- *pre ľubovoľné $a \in A$, $b \in B$ je zvyšok a po delení b v množine C,*
- *pre ľubovoľné $c \in C$ existujú $a \in A$, $b \in B$ také, že c je zvyšok a po delení b?*

Řešení. Najprv si dokážeme zopár tvrdení.

1. Nech a_m je najmenšie číslo z A a b_M najväčšie číslo z B. Potom platí $a_m > b_M$.
   Ak by $a_m < b_M$ tak a_m sa musí nachádzať v C (a_m je zvyšok po delení čísla a_m číslom b_M) a teda A a C nie sú disjunktné, čo je spor.
2. Najväčšie číslo z C, c_M môže byť najviac n.
   Ak by $c_M > n$ tak existuje take $b \in B$ a $a \in A$, že zvyšok po delení čísla a číslom b je c_M. Keďže c_M je rôzne od a platí $a \geq b + c_M$ a keď dosadíme $c > nb > n + 1$ (c_M je zvyšok po delení číslom b) dostávame $a > 2n + 1$, čo je spor a teda pre c_M neexistuje vhodné b a a spĺňajúce druhú podmienku zo zadania.
3. Posledné, čo si ukážeme je, že pre všetky $b \in B$ je $b > n$.
   Ak by existovalo $b \in B, b \leq n$ tak potom medzi číslami $2n+1-b, \ldots, 2n+1$ sa nachádza násobok b (je to $(b + 1)$ posebe idúcich čísel), ktorý sa nemôže nachádzať v A (inak by sme v C museli mať zvyšok 0). Musí byť teda v B (v C nemôže, lebo je viac ako n) aj so všetkými menšími číslami z toho intervalu. Teda $2n + 1 - b$ je určite v B. Zvyšok čísla $2n + 1$ po delení číslom $2n + 1 - b$ je b a musí sa nachádzať v C ($b < n < 2n + 1 - b$), a teda B a C nie sú disjunktné, čo je spor.

Z týchto ohraničení už vieme, že každé dobré rozdelenie vyzerá ako

$$\begin{aligned} C &= \{1, 2, \ldots, n\}, \\ B &= \{n + 1, n + 2, \ldots, n + k\}, \\ A &= \{n + k + 1, \ldots, 2n + 1\}, \end{aligned}$$

kde $1 \leq k \leq n$.

Na druhú stranu každé takéto rozdelenie zrejme spĺňa obidve podmienky. Pre všetky a, b platí, že $2b > a > b$ a teda zvyšok čísla a po delení číslom b je $a - b$. Tento rozdiel je určite číslo medzi 1 a n a preto je v C. Súčasne každé číslo od 1 po n vieme dostať ako rozdiel nejakých 2 čísel z A a B (premyslite si).

A k vieme zvoliť n spôsobmi, a preto existuje n spôsobov ako to rozdeliť.

(Ľudka Šimková a Martin „Vodka“ Vodička)

Úloha N1. *Nech p je prvočíslo a $n > 1$ je prirodzené. Dokážte, že ak $p \mid n^3 - 1$ a $n \mid p - 1$, tak $4p - 3$ je štvorec.*

Řešení. Keďže $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1)$ a z druhej podmienky v zadaní máme nerovnosť $n \leq p - 1$ (lebo $p - 1 > 0$), platí aj $p > n - 1$. Keďže $n - 1 > 0$ a p je prvočíslo také, že $p \mid n^3 - 1$, nutne $p \mid n^2 + n + 1$. Existuje teda $k \in \mathbb{N}$ také, že $kp = n^2 + n + 1$.

Ďalej platí:

$$\begin{aligned} p &\equiv 1 \pmod{n}, \\ n^2 + n + 1 \equiv 1 \equiv kp &\equiv k \pmod{n}. \end{aligned}$$

Vieme, že $p \geq n + 1$, teda

$$n^2 + n + 1 = kp \geq k(n + 1).$$

Odtiaľto

$$k \leq \frac{n^2+n+1}{n+1} = n+1-\frac{n}{n+1}$$

a teda $k \leq n$. Zložením podmienok $k \equiv 1 \pmod{n}$ a $k \leq n$ je nutne $k = 1$, z čoho $p = n^2+n+1$.

Napokon $4p-3 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$. Dokázané. *(Kubo Dargaj)*

Úloha G1. *Je daný tetivový štvoruholník $ABCD$, ktorý nie je lichobežníkom. Na priamke CD sú body E, F tak, že na nej ležia v poradí F, D, C, E. Označme G, H stredy opísaných kružníc trojuholníkom ADF a BCE. Dokážte, že priamky AB, CD, GH sa pretínajú v jednom bode práve vtedy, keď body A, B, E, F ležia na jednej kružnici.*

Řešení. Predpokladajme najprv, že body A, B, E, F ležia na jednej kružnici. Z tetivovosti štvoruholníka $ABCD$ platí:

$$|\angle BCE| = 180^\circ - |\angle BCD| = |\angle BAD|.$$

V tetivovom štvoruholníku $ABEF$ zasa:

$$|\angle BEF| = 180^\circ - |\angle BAD| - |\angle FAD|.$$

Teda ľahko dopočítame uhly v $\triangle BEC$:

$$|\angle EBC| = 180^\circ - |\angle BCE| - |\angle BEF| = |\angle FAD|.$$

To znamená, že rovnoramenné trojuholníky $\triangle FGD$ a $\triangle CHE$ sú podobné, pretože obvodové uhly nad tetivami FD a CE sú rovnako veľké (a teda musia byť aj stredové). Označme si priesečník priamok AB a CD ako S. Keďže S ležia na chordále AB kružníc opísaných $ABEF$ a $ABCD$, má k obidvom kružniciam rovnakú mocnosť:

$$|SF| \cdot |SE| = |SD| \cdot |SC| \qquad \Rightarrow \qquad \frac{|SF|}{|SC|} = \frac{|SD|}{|SE|} = k.$$

To ale už znamená, že S je stredom rovnoľahlosti s koeficientom k, ktorá zobrazuje $\triangle FGD$ na $\triangle CHE$. Body S, G, H sú preto kolineárne a priamky AB, CD, GH sa pretínajú v bode S.

Ostáva dokázať opačnú implikáciu. Ukážeme, že pre každý pevne daný bod F existuje práve jeden taký bod E, že S, G, H sú kolineárne a preto týmto bodom musí byť práve taký, pre ktorý je $ABEF$ tetivový. Všimnime si, že G je pevne daný bodom F a že všetky H' ležia na osi úsečky BC. Pre každý bod F určite existuje tetivový štvoruholník $ABEF$ spĺňajúci zadanie (rozmyslite si), teda máme zaručenú existenciu priesečníka osi úsečky BC s priamkou SF. Ak tieto dve priamky nie sú totožné, musia byť rôznobežné a existuje jediné H ležiace na SF, čím sme vyhrali. A totožné naozaj nie sú, v opačnom prípade by S ležalo na osi BC a $ABCD$ by bol rovnoramenný lichobežník, čo je spor so zadaním. *(Marko Puza a Miro Stankovič)*

Úloha A1. *Nech $a_1, a_2, \ldots, a_{2014} \in \mathbb{R}_0^+$, pričom*

$$\sum_{i=1}^{2014} a_i = 1.$$

Nájdite maximálnu možnú hodnotu výrazu

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2014,\, i|j} a_i a_j.$$

Řešení. Rozdeľme všetky čísla do 11 skupín $A_1, \ldots, A_{11}$ tak, že v skupine A_k budú čísla, ktorých súčet exponentov v prvočíselnom rozklade bude práve $k-1$, $1 \leq k \leq 11$. Žiadne číslo menšie ako 2014 nemá súčet exponentov v prvočíselnom rozklade väčší ako 10, lebo najmenšie číslo, ktoré má súčet exponentov v prvočíselnom rozklade rovný 11, je $2^{11} = 2048 > 2014$. Rozmyslite si, že ak sú čísla x, y v rovnakej skupine, tak ak $x \mid y$, tak $x = y$. Umocníme danú podmienku a dostaneme:

$$1 = 1^2 = \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i^2\right) + \left(2 \sum_{1\le i<j\le 2014, i\mid j} a_i a_j\right) + \left(2 \sum_{1\le i<j\le 2014, i\nmid j} a_i a_j\right).$$

Teraz by sme chceli minimalizovať výraz

$$V = \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i^2\right) + \left(2 \sum_{1\le i<j\le 2014, i\nmid j} a_i a_j\right).$$

Pre $1 \le k \le 11$ označme $s_k = \sum_{l\in A_k} a_l$ a všimnime si, že platí

$$V \ge \sum_{k=1}^{11} s_k^2,$$

lebo naľavo sa nachádzajú všetky členy, čo sú napravo (premyslite si). Pokračujme ďalej v odhadoch:

$$\left(\sum_{1}^{11} 1^2\right)\left(\sum_{k=1}^{11} s_k^2\right) \ge \left(\sum_{k=1}^{11} (1\cdot s_k)\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{2014} a_i\right)^2 = 1,$$

$$\text{teda} \qquad \sum_{k=1}^{11} s_k^2 \ge \frac{1}{11}.$$

Už máme všetko čo potrebujeme, stačí to len dať dokopy:

$$\sum_{1\le i<j\le 2014, i\mid j} a_i a_j = \frac{1 - (\sum_{i=1}^{2014} a_i^2) - (2\sum_{1\le i<j\le 2014, i\nmid j} a_i a_j)}{2} \le \frac{1-\frac{1}{11}}{2} = \frac{5}{11}.$$

Stačí už len nájsť také $a_1, a_2, \ldots, a_{2014}$, aby nastala rovnosť. Keďže rovnosť musí nastať v každom spravenom odhade, nie je ťažké prísť na to, že rovnosť nastane, ak $a_n = \frac{1}{11}$ v prípade, že n je mocnina dvojky (aj nultá), inak $a_n = 0$. Ak neveríte, môžte si to zrátať, je to celkom jednoduchý výpočet. *(Filip „Hiphop“ Hanzely a Miro Psota)*