TR *i*KS **ko**

Úloha 1. *Nech n je kladné celé číslo. Dokážte, že nenulové koeficienty polynómu*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=0}^{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n - k)$$

vieme ofarbiť $2^n - 1$ farbami tak, aby súčet koeficientov každej farby bol 0 a každá farba bola použitá aspoň raz.

Úloha 2. *Nech n je kladné celé číslo. V nekonečnej mriežke $\mathbb{Z}^2$ je n bodov vyfarbených na červeno, zatiaľ čo ostatné sú vyfarbené na modro. Každý červený bod je označený vzdialenosťou od najbližšieho modrého bodu, ktorý je v tom istom riadku alebo stĺpci. Nájdite najmenšie reálne číslo α, pre ktoré súčet všetkých označení neprekročí hodnotu $100n^\alpha$, nezávisle od n a umiestnenia červených bodov.*

(Poznámka: Riadok je množina bodov s danou súradnicou y a stĺpec je množina bodov s danou súradnicou x.)

Úloha 3. *Nech ABC je trojuholník a nech M a N označujú stredy úsečiek $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$. Nech X je bod taký, že úsečka $\overline{AX}$ je dotýkajúca sa opísanej kružnice trojuholníka ABC. Označme kružnicu prechádzajúcu bodmi M a B a dotýkajúcu sa úsečky $\overline{MX}$ ako ω_B a kružnicu prechádzajúcu bodmi N a C a dotýkajúcu sa úsečky $\overline{NX}$ ako ω_C. Ukážte, že kružnice ω_B a ω_C sa pretínajú na priamke BC.*

Úloha 4. *Nech p je prvočíslo a nech a a b sú kladné celé čísla menšie ako p. Dokážte, že*

$$\sum_{k=1}^{b} (-1)^{\lfloor (a-1)k/p \rfloor + \lfloor ak/p \rfloor} \geq 0.$$