Zadání 3. série

Termín odeslání: 27. září 2021

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha C3. Je dáno přirozené číslo n. Z každé posloupnosti n nul a jedniček vyrobíme rovnostranný trojúhelník z nul a jedniček tak, že vždy do následujícího řádku mezi čísla x a y napíšeme $x + y \pmod 2$. Např. pro $n = 5$ a posloupnost 01101 bude výsledný trojúhelník vypadat takto:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 1 & & 1 & & 0 & & 1 \\
& 1 & & 0 & & 1 & & 1 & \\
& & 1 & & 1 & & 0 & & \\
& & & 0 & & 1 & & & \\
& & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Určete počet posloupností nul a jedniček délky n takových, že v každém řádku takto vzniklého trojúhelníku bude sudý počet jedniček.

Úloha G3. Je dán trojúhelník ABC. Na ose úhlu BAC zvolme bod $T \neq A$ a kružnici nad průměrem AT označme α. Strana AB protíná α v bodě $D \neq A$ a kružnice β se dotýká α v bodě D a navíc prochází bodem B. Obdobně AC protíná α podruhé v E a následně se kružnice γ dotýká α v E a prochází bodem C. Přímka BC nyní protíná kružnici β v bodě $K \neq B$ a kružnici γ v bodě $L \neq C$. Dokažte, že $|TK| = |TL|$.

Úloha A3. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pro něž platí, že kdykoliv reálná čísla a, b, c splňují $a + f(b) + f(f(c)) = 0$, pak i

$$f(a)^3 + bf(b)^2 + c^2 f(c) = 3abc.$$

Úloha N3. Pro přirozené číslo $n > 1$ označme největší prvočíslo, jež dělí n, jako $F(n)$. Dvojici různých prvočísel $\{p, q\}$ nazvěme *sladěnou*, pokud pro nějaké přirozené číslo $n > 1$ platí $F(n)F(n + 1) = pq$. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic různých prvočísel, které nejsou sladěné.