Zadanie 2. série

Termín odoslania: 14. novembra 2011

Adresa pre odoslania: *KMS – iKS*
OATČ KAGDM FMFI UK
Mlynská dolina
842 48 Bratislava
Slovenská republika

Úloha A2. Nech $P(x)$ je polynóm stupňa n s reálnymi koeficientami a vedúcim koeficientom rovným 1. Ukážte, že vieme nájsť dva polynómy $Q(x)$ a $R(x)$, ktoré sú oba stupňa n, majú všetky korene reálne a ich vedúci koeficient je rovný 1, také, že $P(x) = Q(x)/2 + R(x)/2$.

Úloha C2. Každému bodu v dvojrozmernej rovine je priradené reálne číslo tak, že pre každý trojuholník, je číslo v strede jeho vpísanej kružnice rovné aritmetickému priemeru čísel v jeho vrcholoch. Dokážte, že každý bod v rovine má priradené rovnaké číslo.

Úloha G2. Kružnica pretína dvakrát každú zo strán BC, CA, AB trojuholníka ABC postupne v bodoch (D_1, D_2), (E_1, E_2) a (F_1, F_2). Priamky D_1E_1 a D_2F_2 sa pretínajú v bode L, E_1F_1 a E_2D_2 sa pretínajú v bode M, F_1D_1 a F_2E_2 sa pretínajú v bode N. Dokážte, že priamky AL, BM a CN sa pretínajú v jednom bode.

Úloha N2. Prirodzené číslo n je *rozložiteľné*, ak existuje 2012 prirodzených čísel a_i s nasledujúcimi vlastnosťami:

(i) $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012}$,
(ii) $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{2012}$,
(iii) $a_i \mid a_{i+1}$ pre $i = 1, 2, \ldots, 2011$.

Dokážte, že až na konečný počet je každé prirodzené číslo rozložiteľné.