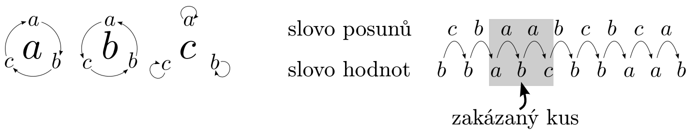
Řešení 4. série

Úloha C4. *Slovem délky n rozumíme uspořádanou n-tici písmen a, b, c. Označme x_n počet všech slov délky n, která neobsahují jako podslovo aa ani bb. Označme y_n počet všech slov délky n takových, že v každé trojici po sobě jdoucích písmen některé z písmen a, b nebo c chybí. Ukažte, že $y_{n+1} = 3x_n$.*

Řešení. Pod písmeny si budeme představovat zbytky modulo třemi: $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$. Pak kdykoli si vezmeme slovo délky $n + 1$ (kterému budeme říkat slovo hodnot), můžeme spočíst rozdíl mezi každými dvěma sousedními písmeny modulo 3 (odečítáme vždy předchozí písmeno od následujícího). Takto vznikne slovo délky n, které budeme nazývat slovo posunů.



Naopak, kdykoli máme dané slovo posunů a první písmeno slova hodnot, máme zbytek slova hodnot jednoznačně určen, stačí postupně přičítat písmena ze slova posunů. Jedno slovo posunů délky n tedy odpovídá třem slovům hodnot délky $n + 1$ (máme na výběr tři možnosti, které počáteční písmeno zvolit).

Nakonec si stačí uvědomit, že slova posunů aa a bb přesně odpovídají těm trojpísmenným slovům hodnot, která obsahují všechna tři písmena a, b, c. Tedy slova posunů, ve kterých se aa ani bb nevyskytuje, odpovídají těm slovům hodnot, ve kterých se nevyskytuje abc, bca, cab, cba, bac ani acb. Každé slovo posunů odpovídá třem takovým, tedy $y_{n+1} = 3x_n$.

Jak se to dalo vymyslet

Tato kapitolka má za cíl rozptýlit představu „To je nejvíc triková bijekce, na to vůbec nešlo přijít!“, kterou by snad mohlo toto řešení u některých čtenářů vzbudit.

Chceme získat představu, jak zhruba vypadá x_n, tedy začneme si psát nějaké slovo bez aa i bb. Vždy, když píšeme další písmeno, se zamyslíme, z kolika písmen máme v daném okamžiku na výběr. Shledáváme, že vždy ze dvou nebo tří, tedy x_n bude něco mezi 2^n a 3^n. Kdy přitom máme tři možnosti? Pouze na začátku, nebo když je předchozí písmeno c. Je-li předchozí písmeno a nebo b, jsou možnosti jen dvě.

Nyní si pro změnu stranu zkusíme napsat některé slovo, která počítá y_n. Opět máme v každém okamžiku na výběr ze tří nebo dvou písmen. Ovšem kdy tentokrát máme na výběr všechna tři písmena? Kromě začátku jen tehdy, když předcházející dvě písmena jsou stejná. Jsou-li předchozí dvě písmena různá, musíme volit jedno z nich.

Vidíme tedy, že písmena c v prvním případě „nějak odpovídají“ dvojicím stejných písmen v druhém případě. Naopak písmena a, b v prvním případě „odpovídají“ dvojicím různých písmen. Toto je samozřejmě jen nepřesná úvaha, ale jak je vidět na řešení výše, je v tomto případě funkční a snadno formalizovatelná.

Poznámky opravujícího. Úloha byla jednoduchá. Řešení podobné vzorovému poslal pouze Bui Truc Lam Michal. Zbylí řešitelé odvodili rekurentní vztah $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$, obdobný pro y, pomocí nichž úlohu dokázali, jednou dokonce došlo na explicitní vyjádření. Body jsem strhával za jejich nedostatečné obhájení, případně za neošetření, pro které hodnoty vlastně dokazujete.

(Mirek Olšák)

Úloha A4. *Najděte všechny dvojice přirozených čísel a, b takových, že neexistuje nekonečná posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňující rekurentní vztah $x_{n+1} = \frac{2x_n - 1}{1 - x_n}$, jejíž první člen je $\frac{F_a}{F_b}$, kde F_k značí k-té Fibonacciho číslo.*

Řešení. Připomínáme, že Fibonacciho posloupnost je zadaná vztahem $F_1 = 1$, $F_0 = 0$ a $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Posloupnost nebude nekonečná, pokud se po nějaké době v posloupnosti objeví 1; řekněme, že se tak stane v x_m. Označíme $y_k = x_{m-k+1}$ pro $k \in \{1, \dots, m\}$. Z rekurentního vztahu dostaneme $y_n = (2y_{n+1} - 1)/(1 - y_{n+1})$, což se dá přepsat jako $y_{n+1} = (y_n + 1)/(y_n + 2)$ a $y_1 = 1$. Spočteme si prvních pár členů této posloupnosti: $1, \frac{2}{3}, \frac{5}{8}, \frac{13}{21} \dots$; chceme dokázat, že $y_n = F_{2n-1}/F_{2n}$. Indukcí, pro $n = 1$ je to jasné a pro $n + 1$ platí

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 1}{y_n + 2} = \frac{F_{2n-1}/F_{2n} + 1}{F_{2n-1}/F_{n2} + 2} = \frac{F_{2n-1} + F_{2n}}{F_{2n-1} + 2F_{2n}} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n+1} + F_{2n}} = \frac{F_{2(n+1)-1}}{F_{2(n+1)}},$$

kde v druhé rovnosti jsme použili indukční předpoklad, že naše tvrzení platí pro n. Tím důkaz indukcí končí.

Aby posloupnost byla konečná, musí se tedy x_1 rovnat některému z čísel y_n. Naopak pokud se nebude rovnat žádnému z nich, nikdy už posloupnost nenabude 1, protože každý člen je jednoznačně určen svým předcházejícím i následujícím členem.

Stačí si tedy rozmyslet, pro které dvojice (a, b) je $F_a/F_b = F_{2n}/F_{2n-1}$ pro některé $n \in \mathbb{N}$. Rozebereme 4 případy:

(i) $a \le b - 2$. Pak

$$\frac{F_a}{F_b} = \frac{F_a}{F_{b-1} + F_{b-2}} \le \frac{F_a}{F_a + F_a}. = \frac{1}{2}$$

Na druhou stranu máme

$$\frac{F_{2n-1}}{F_{2n}} = \frac{F_{2n-1}}{F_{2n-1} + F_{2n-2}} > \frac{F_{2n-1}}{F_{2n-1} + F_{2n-1}} = \frac{1}{2}.$$

Ostrá nerovnost plyne z faktu $F_{2n-2} < F_{2n-1}$, jelikož $2n - 1$ nemůže nabývat dvojky.

(ii) $a = b - 1$. Indukcí si snadno rozmyslíme, že dvě po sobě jdoucí Fibonacciho čísla jsou nesoudělná. Všechny zlomky tvaru F_b/F_{b-1} jsou tak v základním tvaru, a tedy navzájem různé. Proto z těchto dvojic (a, b) vyhovují právě ty, kde je b sudé.

(iii) $a = b$. V takovém případě vždy $F_a/F_b = 1 = F_1/F_2$, tedy takové dvojice zadání vyhovují.

(iv) $a > b$. Fibonacciho posloupnost je neklesající, tedy

$$\frac{F_a}{F_b} \ge 1 \ge \frac{F_{2n-1}}{F_{2n}}.$$

Aby nastala rovnost, musí nastat v obou nerovnostech, tedy $n = 1$, $F_a = F_b$. V tomto případě vyhovuje jen dvojice $(a, b) = (2, 1)$

Máme tedy, že všechny hledané dvojice (a, b) jsou $(2, 1)$ a (n, n), $(2n - 1, 2n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Poznámky opravujícího. Většina z vás se dostala k tomu, jak vypadají členy v této posloupnosti předcházející 1, z toho jste správně odvodili, jakého tvaru nesmí x_1 být. V tomto momentě jste se v řešeních rozdělili, většina z vás po tomto kroku už považovala úlohu za vyřešenou. Bohužel to tak nebylo, protože je vskutku nutné dokázat, že žádná další řešení již neexistují. V tom byla úloha trochu ošemetná, protože se zdála vyřešená ještě dříve, než byla. Několik z vás si toto uvědomilo a úlohu záhy dořešilo, jen někteří zapomněli na ten ošemetný případ $(2, 1)$, na který při svém pokusu úlohu zdolat zapomněl i opravovatel ;). *(Michael „Majkl" Bílý)*

Úloha N4. *Dokažte, že existuje nekonečně mnoho prvočísel p takových, že pro každé z nich existuje přirozené číslo n_p, které nedělí $p - 1$, a přitom $n_p! + 1$ je dělitelné p.*

Řešení. Chceme alespoň pro některá prvočísla p najít takové n_p, že $n_p! \equiv -1 \pmod{p}$. Z Wilsonovy věty přitom víme, že

$$n_p!(n_p+1)(n_p+2)\cdots(p-2)(p-1) \equiv n_p!\underbrace{(-l)(-(l-1))\cdots(-2)(-1)}_{l} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Protože nám stačí najít čísla n_p jen pro některá prvočísla p, můžeme volit číslo l a k němu teprve hledat prvočíslo p. Abychom se nemuseli obtěžovat znaménky a abychom později uměli zajistit podmínky (i) a (ii), zvolíme l sudé, tj. $l = 2k$. Nyní tedy ke zvolenému číslu $2k$ hledáme prvočíslo p tak, aby $2k(2k-1)\cdots 2\cdot 1 \equiv 1 \pmod{p}$. Jinými slovy volíme p jako prvočíselného dělitele čísla $(2k)!-1$. Toto číslo je liché, takže i p je liché.

Protože je $n_p + 2k = p - 1$, tj. $n_p = p - 1 - 2k$, ukažme nejprve, že takto definované n_p je kladné pro každého prvočíselného dělitele čísla $(2k)!-1$. Kdyby $p \le 2k$, pak $(2k)!-1 \equiv -1 \pmod{p}$. Kdyby $p = 2k+1$, pak podle Wilsonovy věty je $(2k)!-1 \equiv -1-1 \pmod{p}$. V obou případech p není dělitel čísla $(2k)!-1$, takže víme, že $p > 2k+1$ a $n_p = p-1-2k > 0$.

Druhým požadavkem je, aby n_p nedělilo číslo $p-1$. Zabývejme se nyní děliteli čísla $p-1$. Namísto dělitelů $p-1$ se však můžeme zabývat děliteli čísla $2k$, neboť

$$p-1-2k \mid p-1 \quad \Leftrightarrow \quad p-1-2k \mid 2k.$$

Bude tedy výhodné, když $2k$ bude mít málo dělitelů. Zvolme k prvočíslo, protože potom nám stačí zajistit jen to, aby se číslo $p-1-2k$ nerovnalo žádnému z čísel 1, 2, k, $2k$. Čísla $p-1-2k$ a 1 mají opačnou paritu, takže se jistě nerovnají. Totéž platí i pro čísla $p-1-2k$ a k, je-li k liché prvočíslo. Odteď proto budeme uvažovat jen lichá prvočísla k. Zbývá zajistit, aby se $p-1-2k$ nerovnalo číslu 2 ani $2k$.

(i) $p-1-2k \neq 2k$

Nerovnost $p \neq 4k+1$ můžeme zajistit výběrem vhodného prvočíselného dělitele čísla $(2k)!-1$. Všechna lichá prvočísla jsou tvaru $4j+1$ nebo $4j+3$ pro nějaké $j \in \mathbb{N}$, a tak by stačilo vědět, že lze vybrat prvočíselného dělitele čísla $(2k)!-1$ tvaru $4j+3$. To možné je, neboť $(2k)!-1 \equiv 3 \pmod{4}$, takže existuje prvočíselný dělitel tvaru $4j+3$. Kdyby totiž všechna prvočísla dělící $(2k)!-1$ byla tvaru $4j+1$, dostali bychom spor modulo 4.

(ii) $p-1-2k \neq 2$

Nyní již máme vybráno prvočíslo p tvaru $4j+3$. Stačí si rozmyslet, že nerovnost $p \neq 2k+3$ je automaticky zajištěna, protože obě strany dávají různé zbytky modulo 4. Protože k je liché (prvo)číslo, je $2k \equiv 2 \pmod{4}$, takže $2k+3 \equiv 1 \pmod{4}$.

Ke každému lichému prvočíslu k (těch je nekonečně mnoho) umíme najít prvočíslo $p > 2k+1$ tvaru $4j+3$ a ke každému z nich umíme najít přirozené číslo $n_p := p-1-2k$ požadovaných vlastností. Stačí tedy už jen zajistit, že vybíraných prvočísel p je nekonečně mnoho. To ovšem plyne z nerovnosti $p > 2k+1$, ze které vidíme, že zvolíme-li k dostatečně velké, bude též p dostatečně velké. Tím jsme hotovi.

Poznamenejme, že celé řešení by se dalo napsat tak, že bychom zvolili rychle rostoucí posloupnost prvočísel $k_1, k_2, \ldots$, například $k_{i+1} > (2k_i)!$, a poté navzájem různá prvočísla $p_1, p_2, \ldots$ tvaru $4j+3$ taková, že $p_i \mid (2k_i)!-1$. K nim bychom pak zvolili $n_{p_i} := p_i - 1 - 2k_i$ a ukázali, že n_{p_i} splňuje požadované vlastnosti. Úmyslně jsme však tento postup nezvolili, aby byla více vidět motivace, proč se co vybírá.

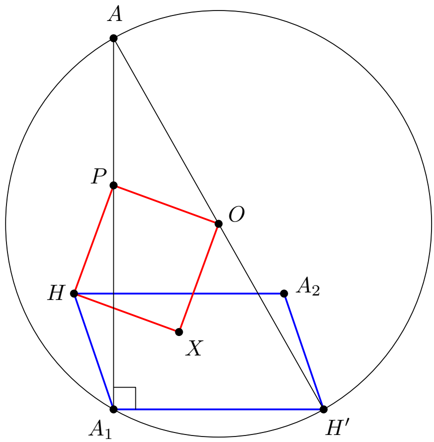
Poznámky opravujícího. Myslím, že nakonec všichni úspěšní řešitelé zvolili trochu jiný způsob, jak ukázat, že $n_p \nmid p-1$. Začali tím, že zvolili n tvaru $6m+1$. Poté vzali libovolné prvočíslo $p \mid n!+1$ a ukázali, že $n! \equiv (p-1-n)! \equiv -1 \pmod{p}$. Nemůže nastat rovnost $n = p-1-n$, protože to by znamenalo, že $p = 2n+1 = 3(4m+1)$ není prvočíslo. Nutně tedy jedno z čísel n, $p-1-n$ je větší než $\frac{p-1}{2}$ a stačí tedy zvolit n_p jako toto větší číslo.

Mrzelo mě, že jsem si při čtení řešení uvědomil, že formulace „a nedělí b“ není jednoznačná (přestože používaná). Lze totiž číst jako „trojka nedělí šestku“ (to se tím běžně rozumí), ale také „trojku nedělí šestka“. Po konzultaci s ostatními jsem se rozhodl řešení založená na druhém výkladu formulace „a nedělí b“ neuznávat, protože tento výklad úlohu značně zjednodušoval. Pokud se nám v budoucnu stane podobná věc, obraťte se na nás prosím s dotazem na naši e-mailovou adresu, zda je zadání myšleno tak či onak. *(Pavel Šalom)*

Úloha G4. *Uvnitř trojúhelníku ABC zvolme bod P. Označme průsečíky polopřímek AP, BP, CP s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC postupně A_1, B_1, C_1. Dále označme A_2, B_2, C_2 obrazy bodů A_1, B_1, C_1 ve středových souměrnostech daných postupně středy stran BC, CA, AB. Dokažte, že ortocentrum trojúhelníku ABC a body A_2, B_2, C_2 leží na jedné kružnici.*

Řešení. Nejprve si vzpomeňme na známý fakt: Je-li H' středový obraz ortocentra H trojúhelníku ABC podle středu BC, pak H' leží na kružnici opsané $\triangle ABC$, přičemž dokonce AH' tvoří její průměr.

Nyní již k dokazované úloze. Označme X takový bod, že $XOPH$ je (případně degenerovaný do úsečky či bodu) rovnoběžník (s vrcholy v tomto pořadí). Ukážeme, že X je středem hledané kružnice. S ohledem na symetrii stačí dokázat $|A_2X| = |HX|$, díky čemuž se můžeme omezit na jednodušší obrázek.



Uvědomme si, že díky středové symetrii je $A_1H'A_2H$ rovnoběžník (také případně degenerovaný). Nakreslíme-li AA_1 svisle, jsou přímky A_1H' (AH' je průměr!) a HA_2 vodorovné nebo degenerované do bodů. Budeme-li nyní sledovat pouze x-ové souřadnice bodů (búno AA_1 je osa y), stačí nám v každém případě ukázat $[X]_x = \frac{1}{2}([H]_x + [A_2]_x)$. To je ale snadné, neboť z rovnoběžníků $XOPH$ a $A_1H'A_2H$ dostáváme

$$[X]_x = [O]_x + [H]_x = \frac{1}{2}([H']_x + [H]_x) + \frac{1}{2}[H]_x = \frac{1}{2}([A_2]_x + [H]_x),$$

kde jsme v prostřední rovnosti využili $[H']_x = 2[O]_x$ (O je střed AH'). Jsme hotovi.

Poznámky opravujícího. Všechna došlá řešení byla správná, přičemž nejprůhledněji se s úlohou vypořádal Štěpán Šimsa. Někteří však ztratili bod za práci s neexistujícím úhly, čtyřúhelníky atp. v případech, kdy byl bod P zrovna zvolen tak nějak nešikovně. Doporučuji si dávat větší pozor, neboť i na IMO se za podobné chyby berou body. *(Michal „Kenny“ Rolínek)*