Řešení 1. série

Úloha N1. *Dokažte, že pro libovolné přirozené $n \geq 2$ existují přirozená čísla $a, b \in \mathbb{N}$ taková, že pro žádné celé číslo x není $x^3 + ax + b$ násobkem n.*

Řešení. Ukážeme, že pre voľbu $a = n-1$ vždy existuje vyhovujúce b. Skúmajme, koľko rôznych zvyškov po delení n môže nadobúdať výraz $x^3 + (n-1)x$. Skúmame teda počet rôznych hodnôt výrazu $V(x) = x^3 + (n-1)x \bmod n$. Zrejme týchto hodnôt bude nanajvýš n – jedna pre každý možný zvyšok $x \bmod n$. Navyše pre $x \equiv 0$ a $x \equiv 1$ je hodnota výrazu V rovnaká, konkrétne je to 0. To znamená, že výraz V v skutočnosti nadobúda najviac $n-1$ spomedzi n možných zvyškov a určite existuje zvyšok $z \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, ktorý výraz V nikdy nenadobúda. Potom ale zrejme vyhovuje $b = n - z$. Pre túto voľbu b totiž výraz $x^3 + (n-1)x + b$ nikdy nenadobudne hodnotu 0 modulo n. Na záver ešte poznamenajme, že a, b nájdené týmto riešením sú skutočne prirodzené čísla. *(Jozef Fülöp)*

Úloha A1. *Je dána posloupnost celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ taková, že pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí*

$$i - n \leq a_i < i.$$

Dokažte, že z ní lze vybrat neprázdnou ne nutně souvislou podposloupnost se součtem 0.

Řešení. První si ukážeme elegantní řešení, které je dokonce konstrukční. Nerovnost si přepišme jako

$$n \geq i - a_i > 0.$$

Dále si postavme orientovaný graf na vrcholech s čísly 1 až n. Hrany povedou z vrcholu i do $i - a_i$ vždy s hodnotou $-a_i$. Víme tedy, že z každého vrcholu vede právě jedna hrana. A jelikož je počet vrcholů konečné číslo, musí zde existovat i cyklus. To tedy znamená, že jsme se dostali z čísla i do stejného čísla i po hranách, které reprezentují rozdíl hodnot vrcholů, a tedy

$$\sum_{j \in \text{cyklus}} -a_j = 0.$$

Jiné řešení z většiny podle Majdy Mišinové. Nejdříve dokážeme, že můžeme předpokládat, že je posloupnost neklesající. Pro spor nechť existují i, j taková, že $j > i$ a $a_i < a_j$. Potom $j > i > a_i > a_j \geq j - n > i - n$, z toho plyne, že je můžeme prohodit a stále budou splňovat podmínky ze zadaní.

Budeme postupovat indukcí. Pro $n = 1$ je tvrzení úlohy triviálně splněné a navíc víme, že pokud posloupnost obsahuje nulu, pak jsme vyhráli. Proto předpokládejme, že ji neobsahuje. Nechť tvrzení platí pro $n-1$ a dokažme jej pro n. Nejprve ukážeme, že existuje jak číslo, které nabývá svého minima, tak číslo, které nabývá svého maxima. Kdyby neexistovalo i takové, že $a_i = i - n$, tak víme, že pro všechny $1 \leq i \leq n-1$ zároveň platí silnější podmínky, a to takové, že $i > a_i \geq i - n + 1$, tedy můžeme aplikovat indukční předpoklad a máme vyhráno. Obdobně pokud neexistuje i takové, že $a_i = i - 1$, tak pro $2 \leq i \leq n$ platí $i - 1 > a_i \geq i - n$. To tedy znamená, že když si řadu přeindexujeme tak, že $b_{i-1} = a_i$, pak bude tato menší řada b_i splňovat podmínky ze zadaní, a tedy v ní bude z indukce podposloupnost s nulovým součtem.

Nyní udělejme pozorování. Pokud existuje alespoň k kladných členů posloupnosti, pak díky tomu, že je posloupnost neklesající, a díky tomu, že nějaké číslo nabývá svého minima (toto číslo je nutně záporné), víme, že dané záporné číslo může mít hodnotu nanejvýš $-k$, protože již nejvyšších k čísel bylo využito. A jelikož je posloupnost neklesající, víme, že i a_1 bude nanejvýš toto $-k$.

Nyní už poslední konstrukční krok. Vezměme si nejnižší možné g a nejvyšší možné h taková, že a_g a a_h nabývají svého maxima. Pokud $g = 1$, pak je jeden člen nulový, tedy tuto možnost nemusíme uvažovat. Jelikož jde tedy o neklesající posloupnost, tak existuje alespoň $h-g+1$ kladných čísel. A tedy $-h+g-1 \geq a_1 \geq 1-n$, z čehož dostáváme, že

$$g-1 \geq g-2 \geq a_1 + a_h \geq h-n.$$

Konečně zadefinujme posloupnost $b_1, \ldots, b_{n-1}$ následovně. Pro $1 \leq i \leq g-2$ a $h \leq i \leq n-1$ platí, že $b_i = a_{i+1}$. Pro $b_{g-1} = a_1 + a_h$ a pro $g \leq i \leq h-2$ nechť $b_i = a_i$. Protože mimo interval $\langle g, h \rangle$ platí $i-1 > a_i \geq i-n$, tak pro i mimo interval $\langle g-1, h-1 \rangle$ platí $i > b_i \geq i-n+1$. Pro b_{g-1} máme $g > b_{g-1} = a_1 + a_h \geq h-n \geq g-n$. A pro $g \leq i \leq h-1$ platí

$$i > b_i = a_i \geq 1 \geq i-n+1.$$

Posloupnost b_i tedy splňuje podmínky ze zadaní pro posloupnost délky $n-1$. Každému členu posloupnosti b umíme přiřadit jeden nebo více členů posloupnost a tak, že žádný není přiřazen víc než jednou. Proto umíme z podposloupnosti se součtem nula tvořenou b_i jednoznačně zkonstruovat dané členy v původní posloupnosti. *(Fíla Čermák)*

Úloha G1. *Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s kružnicí opsanou Ω a ortocentrem H. Body D a E leží po řadě na stranách AB a AC tak, aby $|AD| = |AE|$ a aby čtyřúhelník $ADHE$ byl tětivový. Rovnoběžky s DE procházející po řadě body B a C protínají Ω podruhé po řadě v P a Q. Dokažte, že se přímky PD a QE protínají na kružnici opsané trojúhelníku ADE.*

Řešení. Nech (XYZ) označuje kružnicu opísanú trojuholníku XYZ. Označme α, β, γ uhly pri vrcholoch A, B, C v trojuholníku ABC.

Ak $|AB| = |AC|$, tak D, E sú päty výšok v ABC a $DE \parallel BC$, takže $B \equiv Q$ a $C \equiv P$. Potom PD, QE sú výšky v trojuholníku ABC, takže sa pretínajú v H, a teda tvrdenie platí. Ďalej môžeme BUNV predpokladať $|AB| > |AC|$.

Nech S je priesečník osi uhla BAC a priamky BP a T je päta výšky z A v ABC. $|AD| = |AE|$, takže priamka AS je zároveň osou úsečky DE, takže je na ňu kolmá, a keďže $DE \parallel BP$, tak uhol ASB je pravý. AT je výška vABC, takže aj ATB je pravý uhol, a teda podľa Tálesovej vety je štvoruholník $ABST$ tetivový. Platí preto $|\sphericalangle SAT| = |\sphericalangle SBT|$.

Označme K, L, M postupne obrazy bodu H v osových súmernostiach podľa AS, AB a AC. Potom body L, M ležia na Ω. Keďže AS je osou úsečky DE, tak obrazom (ADE) v osovej súmernosti podľa AS je (ADE), a keďže H na tejto kružnici leží, tak na nej leží aj K. Ukážeme, že PD a QE sa pretínajú v K.

Z definícií bodov K, L, M plynie

$$|AH| = |AK| = |AL| = |AM|,$$

takže A je stred kružnice opísanej $LKHM$. Vďaka obvodovému a stredovému uhlu nad tetivou KH v (KHL) a vďaka tomu, že K je obrazom H podľa AS, a tetivovosti $ABST$ a $BPCL$ máme

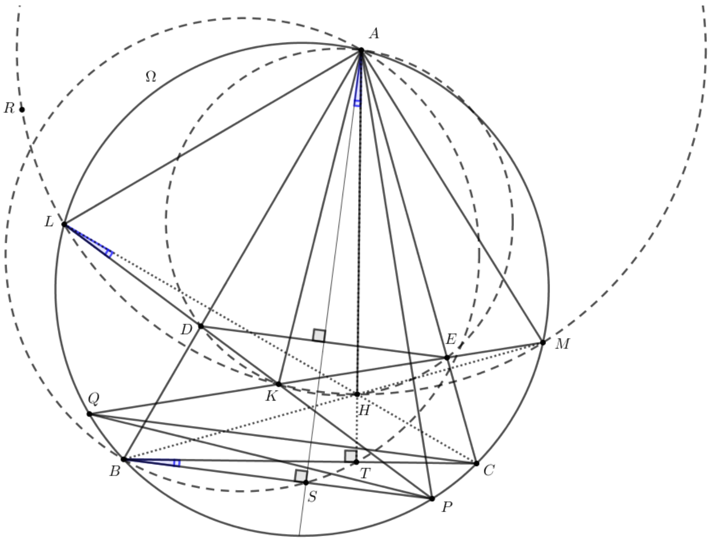
$$|\sphericalangle KLC| = |\sphericalangle KLH| = \frac{1}{2}|\sphericalangle KAH| = |\sphericalangle SAH| = |\sphericalangle SAT| = |\sphericalangle SBT| = |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle PLC|,$$

a keďže body K, P ležia v tej istej polrovine určenej priamkou CL, tak body P, K, L ležia na jednej priamke.

Nech R je bod na oblúku HL kružnice (HKL), ktorý neobsahuje K. Platí

$$|\sphericalangle HKL| = 180^\circ - |\sphericalangle LRH| = 180^\circ - \frac{1}{2}|\sphericalangle LAH| = 180^\circ - |\sphericalangle DAH| = |\sphericalangle HKD|.$$

Prvé dve rovnosti plynú z toho, že H, K, L, R ležia na kružnici so stredom A, tretia z toho, že L je obraz H podľa AB a štvrtá z toho, že $ADKH$ je tetivový. Keďže D a L sú v tej istej polrovine určenej priamkou HK a platí $|\sphericalangle HKD| = |\sphericalangle HKL|$, tak D leží na KL, čiže body P, K, D, L ležia na jednej priamke. Analogicky Q, K, E, M ležia na priamke, a teda K, ktorý leží na (ADE), je naozaj priesečníkom priamok PD a QE.



(Lucia Krajčoviechová a Radek Olšák)

Úloha C1. *Je dána množina S bodů v rovině. Lucinka by chtěla nakreslit několik (uzavřených) kruhů tak, aby pro každé dva různé body z S existoval kruh obsahující právě jeden z těchto bodů. Jaké je nejmenší k takové, že pro libovolnou 2019-prvkovou množinu S se to Lucince může podařit, když nakreslí k kruhů?*

Řešení. Najskôr ukážeme, že v prípade, keď všetky body ležia na jednej priamke je potrebných aspoň 1010 kruhov. Majme k kruhov, ktoré spĺňajú zadanie. Ak na hranici niektorého kruhu ležia body z S, tak vieme polomer tohto kruhu trošku zväčšiť tak, aby obsahoval tú istú množinu bodov čo predtým, ale všetky vo svojom vnútri. Preto môžeme predpokladať, že žiadny bod neleží na hranici kruhu. Pozrime sa na dvojice susedných bodov na našej priamke, niektorý kruh ich musí oddeľovať, takže jeho kružnica prechádza vnútrom úsečky medzi nimi. Úsečiek medzi susednými bodmi máme 2018, takže aspoň 2018 priesečníkov. Taktiež aby bol oddelený bod najviac vľavo od bodu najviac vpravo, tak jeden z nich musí byť vnútri nejakého kruhu, čo pridá 1 priesečník mimo všetkých úsečiek. Každá kružnica má s priamkou najviac 2 priesečníky, potrebujeme aspoň 2019 priesečníkov, takže aspoň 1010 kruhov.

Teraz dokážeme, že nech sú body v rovine rozložené ľubovoľne, tak Lucinke stačí 1010 kruhov. Ukážeme postup akým sa dajú kruhy skonštruovať. Zoberme si priamku p, ktorá nie je rovnobežná zo žiadnou úsečkou s koncovými bodmi v S a posuňme ju tak, aby prechádzala cez nejaký bod C z S a naľavo aj napravo od nej bolo presne 1009 bodov. Dá sa to docieliť, lebo pri posúvaní nikdy nebude prechádzať dvomi bodmi naraz. Ďalej zostrojíme prvé dva kruhy, kruh L obsahuje práve všetky body naľavo od p a kruh P tie napravo.

Všetky body okrem C nazveme „neoznačené“ a postupne ich budeme označovať, ako budeme pridávať ďalšie kruhy. Zoberme si takú dvojicu neoznačených bodov, kde jeden z nich je naľavo, druhý napravo a vzdialenosť medzi nimi je najkratšia možná. Ten naľavo označme A_1 a ten napravo B_1. Teraz zostrojíme kruh K_1 nad priemerom A_1B_1. Tvrdíme, že tento kruh neobsahuje žiadny neoznačený bod, ak by obsahoval, tak tento bod je bližšie ku A_1 aj ku B_1 ako priemer kruhu, preto by sme mali dvojicu s menšou vzájomnou vzdialenosťou. Ďalej postupujeme podobne, keď chceme zostrojiť kruh K_n, tak nájdeme vhodnú dvojicu neoznačených bodov a označíme ju A_n, B_n, teda platí A_n je naľavo, B_n je napravo a vzdialenosť $|A_nB_n|$ je najmenšia možná. Následne zostrojíme kruh K_n nad priemerom A_nB_n. Posledný kruh, ktorý potrebujeme je K_{1008}, aby sme mali spolu 1010 kruhov. Ostali nám ešte dva neoznačené body, tak ich označíme A_{1009}, B_{1009}.

Treba dokázať, že takto budú každé dva body oddelené nejakým kruhom. Bod C je od každého iného bodu oddelený buď kruhom L alebo P. Ak jeden z dvojice bodov leží naľavo a druhý napravo, tak sú oddelené oboma kruhmi L, P. Ostáva už len možnosť, že oba body ležia na jednej strane od p, BUNV na ľavej strane. Nech sú to body A_i, A_j, kde $i < j$. V kruhu K_i leží bod A_i, ale bod A_j bol vtedy ešte neoznačený, lebo $j > i$, takže je zaručené, že neleží v kruhu K_i. Tým je dôkaz hotový.

Iné riešenie. Vieme už, že $k \geq 1010$. Ukážeme iným spôsobom, že 1010 kruhov stačí. Keby sa nám podarilo rozdeliť body pomocou 1010 priamok, tak ľahko ich rozdelíme aj pomocou kruhov, lebo priamka je vlastne „kružnica s nekonečným polomerom," takže pre každú priamku by stačilo pridať jeden kruh, ktorý by mal dosť veľký polomer, aby obsahoval práve body z S na jednej strane od tejto priamky. Lenže pri rozdeľovaní bodov pomocou priamok natrafíme na problém, že niektoré body budú ležať na jednej priamke a nebudú sa dať efektívne rozdeliť pomocou priamok, napríklad keď všetky body z S ležia na jednej priamke, tak potrebujeme až 2018 priamok. S týmto problémom si poradíme pozoruhodným trikom.

Zobrazme celú konfiguráciu v kružnicovej inverzii so stredom v bode O. Nájdeme k kružníc, ktoré spĺňajú zadanie v zobrazenej konfigurácii, zároveň ľahko zabezpečíme, aby žiadna z nich neprechádzala bodom O. Potom celú situáciu zobrazíme naspäť obrátenou inverziou. Každý z k kruhov sa zobrazí na kruh a v jeho vnútri budú presne tie body čo aj v invertovanej situácii. Takto dostaneme k kruhov v pôvodnej situácii, ktoré spĺňajú zadanie.

Už stačí len zvoliť bod O tak, aby v invertovanej situácii neležali žiadne 3 body na priamke. To je ekvivalentné s podmienkou v pôvodnej situácii, aby opísaná kružnica ľubovoľných troch bodov z S neprechádzala bodom O, takže stačí zvoliť bod O mimo všetkých opísaných kružníc.

Dokážeme, že keď žiadne 3 body z S neležia na jednej priamke, tak sa S dá rozdeliť pomocou 1010 priamok, teda aj pomocou 1010 kruhov. Budeme potrebovať nasledovnú lemu z kombinatorickej geometrie.

Lema. Majme $2n$ bielych a $2n$ čiernych bodov v rovine, pričom žiadne 3 neležia na priamke. Potom existuje taká priamka, že na jej oboch stranách je po n bielych a n čiernych bodov.

Dôkaz. Zoberme ľubovoľnú takú orientovanú priamku, že naľavo aj napravo je $2n$ bodov. Povedzme, že naľavo je $b \leq n$ bielych bodov. Začnime priamkou otáčať v kladnom smere. Keď narazíme na prvý bod, môžeme priamkou ďalej otáčať v kladnom smere okolo tohto bodu. Zasekneme sa, keď na priamke budú 2 body. Keď ju ešte trochu otočíme, tak aby znovu bolo naľavo aj napravo $2n$ bodov, tak tie dva body čo ležali na priamke zmenili svoju stranu. Z ľavej strany odišiel jeden bod a prišiel jeden nový bod, preto sa počet bielych bodov naľavo zmenil najviac o 1. Takto v otáčaní pokračujeme ďalej. V momente, keď sme priamku otočili o $180°$, tak vzhľadom k tomu, že na oboch stranách je stále $2n$ bodov, tak naľavo sú presne tie body, čo boli pôvodne napravo a naopak. Pôvodne bolo napravo $2n - b$ bielych bodov, takže teraz je naľavo $2n - b \geq n$ bielych bodov. Nazačiatku sme mali naľavo menej ako n bielych bodov, nakonci viacej ako n a v každom kroku sa ich počet zmenil najviac o 1, takže v niektorom kroku bolo naľavo presne n bielych, teda aj n čiernych bodov a takisto napravo. □

Ďalej budeme postupovať indukciou. Dokážeme mierne pozmenené tvrdenie, a to, že keď máme j bielych a j čiernych bodov, tak vieme pridať $j - 1$ priamok, tak aby všetky biele boli medzi sebou oddelené a všetky čierne medzi sebou oddelené. Pre $j = 1$ to platí, lebo netreba pridať žiadnu priamku.

Ak $j = 2m$ je párne, tak podľa *lemy* vieme pridať priamku tak aby nám vznikli 4 skupiny po m bodov podľa toho, či sú biele/čierne a naľavo/napravo. Teraz stačí už len oddeliť body vrámci jednotlivých skupín. Bielych naľavo aj čiernych naľavo je m, $m < j$, takže podľa indukčného predpokladu ich vieme oddeliť pomocou $m-1$ priamok. Takisto napravo nám stačí $m-1$ priamok, spolu sme použili $1+(m-1)+(m-1)=2m-1=j-1$ priamok.

Ak $j=2m+1$ je nepárne, tak si na chvíľu odmyslíme 1 biely a 1 čierny bod. Pridáme 1 priamku a vďaka *leme* dostaneme 4 skupiny po m bodov. Pozrieme sa, či odobraté body ležia naľavo alebo napravo od priamky a pridáme ich do príslušnej skupiny, keďže majú rôzne farby, tak do rôznych skupín. Naše skupiny majú veľkosti m, m, $m+1$, $m+1$. Z indukčného predpokladu nám na dvojicu skupín s m bodmi stačí $m-1$ priamok a na dvojicu skupín s $m+1$ bodmi stačí m priamok. Spolu sme použili $2m=j-1$ priamok.

Konečne, keď máme 2019 bodov, pridajme si ľubovoľne 1 bod, aby sme mali 2020. Pomocou nejakej priamky ich rozdelíme na 1010 naľavo, ktoré zafarbíme nabielo a 1010 napravo, ktoré budú čierne. Dokázali sme, že potom vieme pridať 1009 priamok tak, aby ľubovoľné dva body rovnakej farby boli oddelené a ľubovoľné dva rôznej farby sú oddelené prvou priamkou, takže nám stačí 1010 priamok, čo predstavuje 1010 kruhov v pôvodnej situácii. *(Tomáš Sásik)*