

Zadanie 4. série

Termín odoslania: 2. novembra 2026

Adresa submitka: www.iksko.org/submit

Email na otázky: info@iksko.org

Úloha C4. Pre každé prirodzené číslo $n \geq 2$ určte najmenšie prirodzené číslo $m \geq 2n$, pre ktoré je možné medzi vrcholmi pravidelného m -uholníka vybrať $2n$ vrcholov, z ktorých n je ofarbených načerveno a n namodro, tak, že vzdialenosť medzi ľubovoľnou dvojicou červených vrcholov je rôzna od vzdialenosti medzi ľubovoľnou dvojicou modrých vrcholov.

Úloha G4. Nech ABC je trojuholník vpísaný do kružnice Γ so stredom O . Nech H je ortocentrum trojuholníka ABC a bod K stred úsečky OH . Nech body D, E, F sú postupne päty výšok z bodov A, B, C . Priesečníky DE s CF a DF s BE označme postupne P, Q . Dokážte, že platí $AK \perp PQ$.

Úloha A4. Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ také, že

$$f(x + yf(x^2)) = f(x) + xf(xy)$$

pre všetky $x, y \in \mathbb{R}$.

Úloha N4. Nech $P(x)$ je polynóm s racionálnymi koeficientami stupňa aspoň 2. Definujeme postupnosť množín $P^0(\mathbb{Q}), P^1(\mathbb{Q}), P^2(\mathbb{Q}), \dots$ ako $P^0(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ a $P^{n+1}(\mathbb{Q}) = P(P^n(\mathbb{Q}))^1$ pre $n \geq 0$. Nech $P^\omega(\mathbb{Q}) = \bigcap_{n=0}^{\infty} P^n(\mathbb{Q})$ je množina čísel, ktoré sú v každej z množín $P^n(\mathbb{Q})$, $n \geq 0$. Dokážte, že $P^\omega(\mathbb{Q})$ je konečná množina.

¹Pre množinu S značíme $P(S) = \{P(s) \mid s \in S\}$