Zadání 5. série

Termín odeslání: 19. prosince 2022

Adresa submitka: `www.iksko.org/submit`

Úloha G5. Je dán trojúhelník ABC a bod D na jeho straně AB. Body K a L leží uvnitř ABC tak, že B, C, K a L leží na kružnici a zároveň $|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle AKD|$ a $|\sphericalangle BCL| = |\sphericalangle ALD|$. Dokažte, že $|AK| = |AL|$.

Úloha A5. Najděte všechny polynomy $P(x)$ s reálnými koeficienty takové, že pro libovolná reálná čísla a, b, c splňující $a+b+c=0$ leží body $[a, P(a)]$, $[b, P(b)]$ a $[c, P(c)]$ na jedné přímce.

Úloha C5. Michal a Vašek spolu jeli na výlet a při nástupu do kilometr dlouhého vlaku[1] si zavolali:

- Michal: „Ahoj Vašku, zrovna jsem nastoupil do vlaku."
- Vašek: „No, já taky, a kde jsi?"
- Michal: „No, tady, a kde jsi ty? Spíš vepředu, nebo vzadu?"
- Vašek: „To já si nepamatuju, a ty?"
- Michal: „No, já vlastně taky ne. . . "
- Vašek: „Jak se teď najdeme?"

Michal a Vašek u sebe každý mají iKS-hodinky, které ukazují, kolik metrů každý z nich ušel, a s jejichž pomocí si spolu mohou po celou dobu svého pobytu ve vlaku volat. Oba ví, kterým směrem je předek vlaku, ale mají mizerný zrak, sluch a vlastně všechny smysly, takže pouze dovedou poznat, když vrazí jeden do druhého nebo do konce vlaku. Nalezněte nejmenší reálné číslo x takové, že se dovedou najít a ujít při tom v součtu nejvýše x metrů, nezávisle na tom, kde do vlaku nastoupili.

Úloha N5. Je dána $(2n^2 - 3n + 2)$-prvková množina M přirozených čísel. Dokažte, že můžeme zvolit n-prvkovou podmnožinu $A \subseteq M$ takovou, že platí: kdykoliv dostaneme přirozené k splňující $2 \leq k \leq n$ a libovolná $x_1, \dots, x_k \in A$ (ne nutně různá), pak $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \notin A$.

[1] Vlak je jednorozměrný, můžeme si ho představit jako kilometr dlouhou úsečku.