TR*i*KSko

Úloha 1. *Najděte všechny konvexní mnohoúhelníky $A_1A_2\dots A_n$ sledující vlastností: Uvnitř mnohoúhelníku existuje bod P , pro který platí*

$$\sum_{i=1}^{n} |PA_i|^2 = 2S,$$

kde S značí obsah mnohoúhelníka

Úloha 2. *Buď n přirozené číslo, $n \geq 2$. Jaký největší počet záporných koeficientů může mít polynom $p(x)^2$, je-li $p(x)$ reálný polynom stupně n?*

Úloha 3. *Nech ABC je trojuholník s $\angle ABC = \angle BCA = 40°$. Os uhla ABC pretína AC v bode D. Dokážte, že $BD + DA = BC$.*

Úloha 4. *Ukažte, že jediný polynom P s celočíselnými koeficienty, který splňuje $n \mid P(2^n)$ pro každé přirozené n, je nulový polynom*

Úloha 5. *Na kytarovaní se sešlo n účastníků a Vítek přinesl zpěvník. Ukázalo se, že každou písničku umí alespoň dva účastníci a platí, že kdykoli nějací dva účastníci umí nějaké dvě písničky (oba obě), pak každou z těchto dvou písniček umí jiný počet účastníků. Ukažte, že ve zpěvníku je nanejvýš $(n-1)^2$ písniček.*