

Zadanie 4. série

Termín odoslania: 18. novembra 2019

Adresa submitka: www.ikska.org/submit

Úloha C4. Je daných päť päťstoprvkových podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, 1000\}$. Aké je najväčší m také, že medzi nimi nutne nájdeme dve, ktorých prienik tvorí aspoň m prvkov?

Úloha G4. Nech ABC je ostrouhlý trojuholník s opísanou kružnicou ω . Päťu výšky z vrcholu A označme H . Ďalej nech P a Q sú body na ω také, že $|PA| = |PH|$ a $|QA| = |QH|$. Dotyčnica k ω z bodu P pretína priamky AC a AB po rade v bodoch E_1 a F_1 , dotyčnica k ω z Q pretína priamky AC a AB po rade v bodoch E_2 a F_2 . Dokážte, že opísané kružnice trojuholníkom AE_1F_1 a AE_2F_2 majú rovnaký polomer a priamka spájajúca ich stredy je rovnobežná s dotyčnicou k ω z bodu A .

Úloha N4. Nájdite všetky $m, n \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí

$$2^n + (n - \varphi(n) - 1)! = n^m + 1,$$

kde $\varphi(n)$ značí Eulerovu funkciu čísla n , teda počet prirodzených čísel menších než n nesúdeliteľných s n .

Úloha A4. Organizátori iKSka sa rozhodli do tejto série vymyslieť funkcionálnu rovnicu. Radi by vyrobili takú funkcionálnu rovnicu, ktorá má práve jedno riešenie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a pre ktorú navyše platí, že f má za obor hodnôt \mathbb{Z} . Zatiaľ sa im však nepodarilo žiadnu vymyslieť, preto sa obrátili na vás. Existuje taká funkcionálna rovnica?

(Funkcionálna rovnica vyzerá tak, ako by ste čakali - rovnica, v ktorej sa vyskytuje nejaké násobenie, sčítanie, odčítanie a vkladanie do f , či už premenných alebo výrazov.)

Formálnejšie: Funkcionálna rovnica je rovnica tvaru $E = 0$, kde E je *funkcionálny výraz*. Medzi funkcionálne výrazy patrí ľubovoľná reálna konštanta a ľubovoľná premenná z množiny $\{x_1, x_2, \dots\}$. Navyše, ak sú V a W funkcionálne výrazy, potom sú funkcionálnymi výrazmi aj $V + W$, $V - W$, $V \cdot W$ a $f(V)$. Žiadny výraz, ktorý sa nedá vyrobiť konečnou aplikáciou týchto pravidiel, funkcionálnym výrazom nie je. Riešením funkcionálnej rovnice je potom ľubovoľná funkcia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ taká, že pre ľubovoľnú voľbu reálnych premenných x_1, x_2, \dots je rovnica splnená.)