Riešenie 6. série

Úloha N6. *Nájdite všetky prirodzené čísla n, pre ktoré existujú také celé čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k > 3$, že*

$$n = n_1 n_2 \ldots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\ldots(n_k-1)} - 1.$$

Riešenie. Ak prirodzené číslo n spĺňa zadanú podmienku, tak $n = 2^m - 1$ pre nejaké prirodzené číslo m. Ľahko overíme, že jediné vyhovujúce $m < 10$ je 3.

Majme $m \geq 10$. Dokážeme, že $n = 2^m - 1$ nemôže vyhovovať podmienke zo zadania. Pre spor predpokladajme, že pre nejaké $k \geq 1$ a $n_1, n_2, \ldots, n_k$ platí

$$10 \leq m = \frac{1}{2^k}(n_1 - 1)(n_2 - 2) \cdots (n_k - 1).$$

Pre $l \geq 10$ ľahko ukážeme (spravte to), že $2^l - 1 > l^3$. Preto

$$2^m - 1 > m^3 = \left(\frac{n_1 - 1}{2}\right)^3 \left(\frac{n_2 - 1}{2}\right)^3 \cdots \left(\frac{n_k - 1}{2}\right)^3.$$

Keďže $n = 2^m - 1$ je nepárne, všetky $n_i > 3$ musia byť nepárne, teda všetky n_i sú aspoň 5. Takže

$$\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)^3 \geq 4 \cdot \frac{n_i - 1}{2} > n_i$$

pre $i = 1, 2, \ldots, k$. Dokopy s predošlým tak máme

$$n = 2^m - 1 > n_1 n_2 \cdots n_k = n,$$

čo je spor.

Jediné riešenie je $n = 2^3 - 1 = 7$.

Poznámky opravujúceho. Príklad bol ľahký. Tí čo sa s ním nepopasovali by si mali odniesť, že keď sa majú rovnať funkčné hodnoty dvoch rôzne rýchlo rastúcich funkcií – ako napríklad polynomiálna a exponenciálna – tak sa to môže stať len pre malé prípady, lebo neskôr nám rýchlejšie rastúca funkcia „utečie“. *(Matúš Stehlík)*

Úloha A6. *Majme prirodzené číslo $n \geq 2$. Koľko riešení má systém rovníc*

$$\begin{aligned} x_1 + x_n^2 &= 4x_n \\ x_2 + x_1^2 &= 4x_1 \\ &\vdots \\ x_n + x_{n-1}^2 &= 4x_{n-1} \end{aligned}$$

pre nezáporné reálne čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$?

Riešenie. Indexy berieme modulo n. Postupným vyjadrovaním dostaneme polynomiálnu rovnicu stupňa 2^n v premennej x_1. Pre x_1 teda existuje najviac 2^n vyhovujúcich riešení. Ostatné premenné sú jednoznačne určené voľbou x_1. Sústava ma preto najviac 2^n riešení.

Vidíme, že ak všetky x_i majú byť nezáporné, tak každé x_i musí ležať v intervale $[0, 4]$. Preto môžme položiť $x_1 = 2 - 2\cos\alpha$, pre práve jedno $\alpha \in [0, \pi]$. Potom počítajme

$$x_2 = 4(2 - 2\cos\alpha) - (2 - 2\cos\alpha)^2 = 4 - 4\cos^2\alpha = 2 - 2\cos 2\alpha.$$

Keď by sme pokračovali, dostaneme postupne $x_i = 2 - 2\cos 2^{i-1}\alpha$ pre všetky $i \geq 1$. Nakoniec samozrejme obdržíme $x_1 = x_{n+1} = 2 - 2\cos 2^n\alpha$. Teda musí platiť $\cos\alpha = \cos 2^n\alpha$. A zasa naopak: pre každé také α máme riešenie systému rovníc a pre rôzne α máme rôzne riešenia.

Všimnime si, že $\cos\alpha = \cos 2^n\alpha$ je ekvivalentné s $2^n\alpha = \pm\alpha + 2k\pi$ pre nejaké $k \in \mathbb{Z}$, a to je ekvivalentné s $\alpha = 2k\pi/(2^n \mp 1)$. Vzhľadom k podmienke $\alpha \in [0,\pi]$ máme riešenia $2k_1\pi/(2^n-1)$ pre $k_1 = 0,1,\dots,2^{n-1}-1$ a $2k_2\pi/(2^n+1)$ pre $k_2 = 1,2,\dots,2^{n-1}$. Tvrdíme, že týchto 2^n hodnôt je rôznych. Pre spor predpokladajme, že $2k_1\pi/(2^n-1) = 2k_2\pi/(2^n+1)$, teda $k_1(2^n+1) = k_2(2^n-1)$. Pretože 2^n-1 a 2^n+1 sú nesúdeliteľné, $(2^n+1) \mid k_2$, čo je spor. Takto máme 2^n rôznych hodnôt α, ku ktorým prislúcha 2^n rôznych riešení. *(Ondrej Kováč)*

Úloha G6. *Body I a H sú v tomto poradí stred kružnice vpísanej a ortocentrum ostrouhlého trojuholníka ABC. Body B_1 a C_1 sú postupne stredy strán AC a AB. Vieme, že polpriamka B_1I pretína stranu AB v bode B_2 ($B_2 \neq B$), polpriamka C_1I pretína predĺženie strany AC v bode C_2. Priamky B_2C_2 a BC sa pretínajú v bode K a bod A_1 je stredom kružnice opísanej trojuholníku BHC. Dokážte, že tri body A, I a A_1 ležia na jednej priamke práve vtedy, keď sa rovnajú obsahy trojuholníkov BKB_2 a CKC_2.*

Riešenie (podľa Patrika Baka). Ponajprv určme polohu A_1. Keďže $\alpha < 90°$, tak $|\sphericalangle BHC| = 180° - \alpha > 90°$. Bod A_1 leží teda v polrovine opačnej k BCH a z vlastností stredového uhlu platí $|\sphericalangle BA_1C| = 2\alpha$. Celá pointa príkladu teraz spočíva v objave, že tvrdenie je ekvivalentné podmienke $\alpha = 60°$. K tomuto nás mala priviesť nutná podmienka vyplývajúca z predpokladu kolinearity bodov A, A_1, I. Naozaj, potom A_1 musí ležať na kružnici opísanej $\triangle ABC$, platí $|\sphericalangle BA_1C| = 180° - \alpha$, čo dokopy s predošlým dáva $\alpha = 60°$.

Ak naopak $\alpha = 60°$, tak A_1 je zjavne stred oblúka BC kružnice opísanej $\triangle ABC$ neosahujúceho bod A, teda bod A_1 leží na osi uhla α, čo je priamka AI. Tak sme dokázali, že body A, A_1, I ležia na priamke práve vtedy, keď $\alpha = 60°$.

Venujme sa teraz druhej časti ekvivalencie. Zrejme platí $S_{BKB_2} = S_{CKC_2} \Leftrightarrow S_{ABC} = S_{AB_2C_2}$. Oba tieto obsahy vyjadríme pomocou dĺžok strán $\triangle ABC$. Spočítame najprv $|AB_2|$. Označme D priesečník osi uhla γ s AB. Podľa Menelaovej vety pre trojuholník ACD platí

$$\frac{|ID|}{|IC|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} \cdot \frac{|AB_2|}{|DB_2|} = 1 \iff \frac{|AB_2|}{|DB_2|} = \frac{|IC|}{|ID|}. \tag{1}$$

Označme ρ polomer kružnice vpísanej $\triangle ABC$. Potom zrejme platí

$$\frac{|IC|}{|ID|} = \frac{|CD|}{|ID|} - 1 = \frac{S_{ABC}}{S_{ABI}} - 1 = \frac{\rho(a+b+c)}{c\rho} - 1 = \frac{a+b}{c}.$$

Označme $d = |AB_2|$. Zrejme $|DB_2| = |AB_2| - |AD|$. Je známe, že $|AD| = \frac{bc}{a+b}$. Rovnosť (1) môžme prepísať na

$$\frac{d}{d - \frac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Odtiaľ vyjadríme $|AB_2| = d = \frac{bc}{a+b-c}$. Keďže sme v odvodeniach nepoužili, že B_2 je vnútorný bod AB, môžme analogicky odvodiť vzorec $|AC_2| = \frac{bc}{a+c-b}$. Potom

$$S_{A_2B_2C} = \frac{1}{2}|AB_2||AC_2|\sin\alpha = \frac{\sin\alpha}{2} \cdot \frac{b^2c^2}{(a+b-c)(a-b+c)} =$$
$$= \frac{\sin\alpha}{2} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2-b^2-c^2+2bc} = \frac{\sin\alpha}{2} \cdot \frac{b^2c^2}{2bc - 2bc\cos\alpha} = \frac{bc\sin\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2(1-\cos\alpha)}.$$

Porovnaním so vzorcom $S_{ABC} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$ dostávame, že

$$S_{ABC} = S_{AB_2C_2} \iff \frac{1}{2(1-\cos\alpha)} = 1 \iff \alpha = 60°.$$

(Filip Sládek)

Úloha C6. *Nech M je množina n bodov v rovine, pre ktorú platí:*

(i) *dá z nej vybrať 7 bodov, ktoré sú vrcholmi konvexného sedemuholníka,*
(ii) *pre každých 5 bodov z M, ktoré sú vrcholmi konvexného päťuholníka, je v M aspoň jeden bod ležiaci vo vnútri tohto päťuholníka.*

Nájdite najmenšie možné n.

Riešenie (podľa Miroslava Stankoviča). Ponajprv si ujasnime zopár pojmov. *Vnútro* znamená, že hranica tam nepatrí. Navyše v tomto riešení do *polroviny* nezarátavame priamku, ktorá ju vytvára. Aby platilo (i), nutne $n \geq 7$. Prejdime teda postupne malé hodnoty n, ktoré nevyhovujú, a keď nám to ďalej nepôjde, zostrojíme príklad čo vyhovuje.

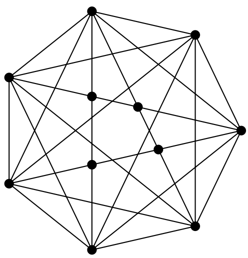
$n = 7$: Podľa (i) tvorí týchto 7 bodov konvexný 7-uholník. Stačí teraz vziať ľubovoľný konvexný 5-uholník a je jasné, že v jeho vnútri neleží žiadny bod.

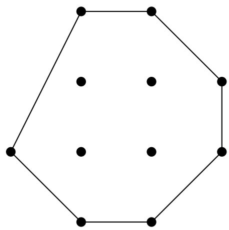
$n = 8$: Nájdeme konvexný 7-uholník. Ak zvyšný bod neleží vnútri, tak postupujeme podľa predchádzajúceho prípadu. Inak vezmeme priamku prechádzajúcu týmto bodom, na ktorej neleží žiaden bod 7-uholníka. V jednej polrovine vyťatej touto priamkou sú aspoň 4 body. Tieto s naším vnútorným bodom tvoria konvexný 5-uholník bez bodu vo vnútri.

$n = 9$: Body konvexného 7-uholníka označme $A, B, \ldots, G$ a ďalšie 2 body označme M, O. Ak M alebo O neleží v 7-uholníku, riešime to ako predošlé prípady. V opačnom prípade v jednej z polrovín vyťatých priamkou MO ležia aspoň 3 body 7-uholníka, lebo aspoň 5 bodov 7-uholníka neleží na MO. Znova tak máme konvexný 5-uholník, v ktorom neleží žiaden bod.

$n = 10$: Body konvexného 7-uholníka označme $A, B, \ldots, G$ a ďalšie 3 body označme I, K, S. Ak niektorý z bodov I, K, S neleží v 7-uholníku, riešime ako predošlé prípady. Inak zvolíme bod $\check{R}$ vnútri trojuholníka IKS tak, že priamky $\check{R}I, \check{R}K, \check{R}S$ neobsahujú žiadny bod 7-uholníka (rozmyslite si, prečo taký bod musí existovať). Polpriamky $\check{R}I$, $\check{R}K$ a $\check{R}S$ vytínajú v rovine 3 disjunktné oblasti bez hranice, pričom v niektorej z nich ležia aspoň 3 body z $\{A, B, \ldots, G\}$. Spolu s dvomi bodmi z $\{I, K, S\}$, ktoré padnú na priamky ohraničujúce spomínanú oblasť, tvoria konvexný 5-uholník bez vnútorného bodu.

Tu sa končí naše snaženie hľadať problémy, lebo ďalej to už ide. Tu sú príklady.





Poznámky opravujúceho. Mnohí sa úlohy zľakli, ale ako vidno z *Mirovho* riešenia, žiadne delo okrem sedliackeho rozumu a Dirichleta nebolo treba. *(Filip Sládek)*