Riešenia 4. série

Úloha A4. *Konečná množina $\mathcal{S}$ kladných celých čísel sa nazýva žirafová, ak $\mathcal{S}$ obsahuje celé číslo $|\mathcal{S}|$, kde $|\mathcal{S}|$ označuje počet rôznych prvkov v $\mathcal{S}$. Majme funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takú, že pre ľubovoľnú žirafovú množinu $\mathcal{S}$ platí, že množina $f(\mathcal{S})$ je tiež žirafová, kde $f(\mathcal{S}) := \{f(a) : a \in \mathcal{S}\}$. Nájdite všetky možné hodnoty $f(2024)$.*

Riešenie. Ukážeme, že jediné možné hodnoty $f(2024)$ jsou 1, 2 a 2024. Fungují například funkce dané předpisy $f(n) = 1$,

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{pro } n = 2024, \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

a $f(n) = n$ pro $n \in \mathbb{N}$. První totiž vytváří jen žirafovou množinu $\{1\}$, pokud je pro druhou funkci $2 \in f(\mathcal{S})$, musí v ní být i 1, protože $\{2024\}$ není žirafová, a množina $\{1, 2\}$ už žirafová je. Pro třetí funkci je podmínka také zřejmě splněna, jelikož $f(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ bude žirafová triviálně.

Nejprve předpokládejme, že funkce nabývá nějaké hodnoty m v nekonečně mnoha číslech. Vyberme jedno takové číslo k a dále $k-1$ po dvou různých dalších (různých i od k). Dohromady těchto k čísel tvoří žirafovou množinu, jejíž obrazem je ale $\{m\}$, proto $m = 1$. Dále uvažme žirafovou množinu obsahující číslo 2024 a 2023 po dvou různých čísel (různých i od 2024), jejichž funkční hodnota je 1, obrazem této množiny bude $\{f(2024), 1\}$. Pokud $f(2024) > 2$, obsahuje tato množina dva různé prvky různé od dvou, což je spor s její žirafovostí, tedy jedinou přípustnou hodnotou $f(2024)$ jsou v tomto případě 1 a 2.

Pokud funkce nabývá každé hodnoty jen v konečně mnoha číslech, musí naopak nabývat nekonečně mnoha hodnot. Uvážíme žirafovou množinu obsahující číslo 2024 a 2023 po dvou různých čísel (různých i od 2024) s navzájem různými funkčními hodnotami většími než $f(2024)$ i 2024 (to můžeme právě proto, že funkce nabývá libovolně velkých hodnot). Obrazem této množiny bude množina obsahující 2024 různých čísel, z nichž všechny až na $f(2024)$ jsou větší než 2024, aby tedy byla žirafová, musí platit $f(2024) = 2024$. To je tedy jediná další možná funkční hodnota.

Poznámky opravovateľa. Úloha také šla řešit rozborem případů podle hodnot $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ a matematickou indukcí. *(Michal Janík)*

Úloha C4. *Šošo má $N \geq 2$ nádob na sušienky, ktoré sú na začiatku prázdne. Každý deň si vyberie dve rôzne nádoby a do každej vloží jednu sušienku. Následne každý večer Džavo zoberie nádobu s najväčším počtom sušienok a všetky ich zje. Ak tento proces pokračuje donekonečna, aký je maximálny možný počet sušienok, ktorý môže Džavo za jeden večer zjesť?*

Riešenie.

()

Úloha G4. *V trojuholníku ABC označme O stred jeho opísanej kružnice a I stred kružnice jemu vpísanej. Nech os vonkajšieho uhla pri vrchole A pretína priamku BC v bode D. Nech I_A je stred pripísanej kružnice trojuholníka ABC oproti vrcholu A. Nech bod K leží na priamke AI tak, že $|AK| = 2|AI| < |IK|$. Dokážte, že ak je úsečka DF priemerom kružnice opísanej trojuholníku DKI_A, tak potom platí $|OF| = 3|OI|$.*

Riešenie. Budeme riešiť úlohu v trojuholníku $I_AI_BI_C$, v ktorom platí,že A, B, C sú päty výšok z vrcholov I_A, I_B, I_C.Z čoho vyplýva,že I je orthocentrom v tomto trojuholníku. S týmito poznatkami prenechávame ako cvičenie pre čitateľa, že zadaná úloha je ekvivalentná nasledovnej úlohe:

Lemma. *V trojuholníku ABC nech D, E, F sú postupne päty výšok z A, B, C . Nech H a N sú ortocentrom a stredom kružnice opísanej trojuholníku DEF , T je priesečník priamok EF a BC a K je bod na priamke AD taký, že $DK = 2HD$. Ak je teda úsečka TS priemerom kružnice trojuholníka ATK , potom $NS = 3NH$.*

Ak je teraz O stredom kružnice opísanej ABC , tak je známe, že N je stredom OH. My ukážeme, že $OH = OS$ (inými slovami , bod S definujem ako obraz H podľa stredovej súmernosti vzhľadom na O a ukážeme, že $\angle TAS = \angle TKS = 90°$)

Nech X je druhý priesečník kružnice trojuholníka ABC a $AFHE$. Podľa vety o potenčnom strede v kružníc $(AFHE), (ABC), (BFEC)$, ležia body A, X, T na priamke .Keďže O leží na osi , tak $AS \parallel XH$ a $\angle SAT = 90$.

Nech body G a M sú postupne ťažisko trojuholníka ABC a stred úsečky BC. Všimnime si, že X, M, H sú kolineárne. To sa dá nahliadnuť z toho, že obraz H v stredovej súmernosti podľa M je bod $\tilde{A}$, ktorý je antipodálny k A na kružnici ABC. Následne rovnobežka s BC vedenená cez bod A pretína kružnicu opísanú ABC v bode A'. Taktiež nech H' je obrazom v osovej súmernosti bodu H podľa BC , potom využitím kolineárnosti a pravých uhlov okolo bodu X získame $\angle H'MT = \angle XMD = \angle XAD$ a teda štvoruholník $TAMH'$ je tetivový, takže mocnosťou bodu D vzhľadom ku kružnici opísanej ATM máme s použitím pár jednoduchých pozorovaní :

$$DA \cdot DH' = DT \cdot DM, AA' = 2 \cdot DM, DK = 2 \cdot DH' \implies \triangle DAA' \sim \triangle TDK \implies A'D \perp TK$$

Vieme, že rovnoľahlosť so stredom v G zobrazuje kružnicu DEF na ABC potom A', G, D sú kolineárne a $GD \perp TK$. Z toho vyplýva, že kým $HS = 3HG$ a $HK = 3HD$, potom $GD \parallel SK$ a $\angle SKT = 90$, čím sme hotoví.

Poznámky opravovateľa. Väčšina riešení riešila úlohu v trojuholníku $I_AI_BI_C$, pričom objavili sa avšak aj analytické riešenia. *(Adam „Džavo“ Džavoronok)*

Úloha N4. *Nech $P(x)$ je polynóm s celočíselnými koeficientmi, ktorý má aspoň jeden racionálny koreň. Nech n je kladné celé číslo.*

Miško a Zdeněk hrajú hru. Najprv Miško napíše n celých čísel (nie nutne rôznych) na n rôznych miest na tabuli. Potom môže Zdeněk urobiť nasledovnú operáciu: vyberie si pozíciu, na ktorej je napísané celé číslo a, potom si vyberie inú pozíciu, na ktorej je napísané celé číslo b, potom na prvej pozícii vymaže a a na jeho miesto napíše $a + P(b)$. Po ľubovoľnom nezápornom počte vykonaných operácii sa Zdeněk môže rozhodnúť ukončiť hru. Keď Zdeněk hru ukončí, jeho skóre sa rovná počtu výskytu najčastejšieho prvku z pomedzi čísel na tabuli.

Nájdite v závislosti od $P(x)$ a n maximálne skóre (bez ohľadu na Miškovu voľbu počiatočných n čísel), ktoré môže Zdeněk dosiahnuť.

Riešenie.

()