Riešenie 4. série

Úloha C4. *Nájdite všetky neprázdne množiny S celých čísel také, že*

$$\forall m, n \in S\colon 3m - 2n \in S.$$

Riešenie. Ak je v množine S jediné číslo a, potom môžeme zvoliť len $m = n = a$, čím dostaneme $3a - 2a \in S$, čo zjavne platí. Všetky množiny $S = \{a\}$ teda podmienku zo zadania spĺňajú.

Zamerajme sa teraz na aspoň dvojprvkové množiny. Vyberme spomedzi rozdielov dvoch rôznych prvkov S (v abs. hodnote) ten najmenší a označme ho d. Takýto rozdiel je skutočne nejaké konkrétne číslo – predstavme si, že si najprv zvolíme za d ľubovoľný rozdiel dvoch čísel z S, potom skúšame v nejakom poradí všetky ďalšie dvojice a vždy, keď nájdeme nejakú s menším rozdielom, nastavíme d na túto novú, menšiu hodnotu; keďže je ale d prirodzené číslo, zmenšiť ho môžeme len konečne veľa krát, teda od nejakého okamihu už d nikdy nezmenšíme, a vtedy sme už dosiahli jeho žiadanú hodnotu. (Ak by napr. S mohla obsahovať ľubovoľné reálne čísla, nemusel by existovať žiadny rozdiel, ktorý by bol najmenší – premyslite si, prečo.) Niektoré dve čísla, ktoré majú rozdiel d, potom vieme zapísať ako $a + d$, $a + 2d$.

Ukážeme teraz, že množina S musí obsahovať všetky čísla tvaru $a + (3k + z)d$, kde $z \in \{1, 2\}$ a $k \in \mathbb{Z}$.

Postupujme matematickou indukciou. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre dané k (pre $k = 0$ zjavne platí, lebo hovorí len že $a + d, a + 2d \in S$), a dosaďme postupne do podmienky zo zadania:

$$\begin{aligned} m = a + (3k+2)d,\ n = a + (3k+1)d\colon &\quad a + (3k+4)d = a + (3(k+1)+1)d \in S,\\ m = a + (3k+1)d,\ n = a + (3k+2)d\colon &\quad a + (3k-1)d = a + (3(k-1)+2)d \in S, \end{aligned}$$

z čoho vieme, že $a + (3k + 4)d$ aj $a + (3k - 1)d$ tiež patria do S, a môžeme ďalej dosadzovať

$$\begin{aligned} m = a + (3k+1)d,\ n = a + (3k-1)d\colon &\quad a + (3k+5)d = a + (3(k+1)+2)d \in S,\\ m = a + (3k+2)d,\ n = a + (3k+4)d\colon &\quad a + (3k-2)d = a + (3(k-1)+1)d \in S. \end{aligned}$$

Zistili sme, že naše tvrdenie platí aj pre $k + 1$ (z čoho indukciou od k=0 zistíme, že platí pre všetky nezáporné k), aj pre $k - 1$ (z čoho podobne zistíme, že platí pre všetky záporné k), S teda obsahuje všetky čísla v tomto tvare pre všetky celé k.

Množina všetkých čísel v tomto tvare skutočne vyhovuje. Ak si totiž zvolíme ľubovoľné $m = a + (3k_1 + z_1)d$, $n = a + (3k_2 + z_2)d$, podmienka zo zadania nám hovorí, že

$$3m - 2n = a + (9k_1 - 6k_2 + 3z_1 - 2z_2)d = a + gd \in S$$

kde $3 \nmid g$, čo dokážeme sporom – ak $3 \mid g$, potom $3 \mid -2z_2$, teda $3 \mid z_2$, čo nie je možné pre $z_2 \in \{1, 2\}$. Číslo $a + gd$ je preto medzi číslami, o ktorých sme už povedali, že do S patria, a teda takáto množina S našu podmienku splňuje.

Čo ale ak patrí do S ešte nejaké iné číslo? Môže ísť len o číslo v tvare $a + 3kd$, pretože ku každému číslu b vieme nájsť k také, že $a + (3k - 2)d \le b \le a + (3k + 1)d$; z minimality d musí potom platiť, že $a + (3k - 1)d \le b \le a + 3kd$, ale keďže chceme b iné od $a + (3k - 1)d$, musí platiť dokonca $a + 3kd \le b \le a + 3kd$, teda $b = a + 3kd$. Dosaďme teraz

$$\begin{aligned} m = a + (3k+1)d,\ n = a + 3kd\colon &\quad 3m - 2n = a + 3(k+1)d \in S,\\ m = a + (3(k-1)+2)d,\ n = a + 3kd\colon &\quad 3m - 2n = a + 3(k-1)d \in S, \end{aligned}$$

z čoho zasa matematickou indukciou v oboch smeroch po číselnej osi dokážeme, že do S patria aj všetky čísla v tvare $a + 3kd$. O množine S teda už vieme, že musí obsahovať všetky čísla v tvare $a + ld$; žiadne ďalšie číslo už obsahovať nemôže, lebo také číslo by muselo ležať medzi dvomi číslami $a + (l - 1)d$ a $a + ld$, čo je spor s minimalitou d.

Takáto množina vyhovuje zadaniu, lebo pre $m = a + l_1 d, n = a + l_2 d$ platí $3m - 2n = a + (3l_1 - 2l_2)d = a + l_3 d \in S$.

Záver: riešením sú množiny

(i) $S = \{a\}$,

(ii) $S = \{a + (3k + z)d;\ k \in \mathbb{Z}; z \in \{1, 2\}\}$,

(iii) $S = \{a + ld;\ l \in \mathbb{Z}\}$.

Poznámky opravujúceho. Viacerí z vás dokazovali, že množina S je nekonečná, čo potom (neprekvapivo) vôbec nevyužili, alebo viac či menej nezvládli dôkaz, že ak do riešenia tvaru (ii) nejaké číslo pridáme, tak musí vzniknúť riešenie tvaru (iii) (kľúčom k peknému dôkazu je zvolenie minimálneho d, za čo by ste určite aspoň bod získali). Celkovo bolo ale riešení na plný počet bodov celkom v rámci očakávaní. *(Jakub „Xellos“ Šafin a Marta Kossaczká)*

Úloha N4. *Nájdite všetky také $n \in \mathbb{N}$, pre ktoré platí $2n + 7 \mid n! - 1$.*

Riešenie. Predpokladajme, že $2n + 7 \mid n! - 1$ pre nejaké n. Ak $2n + 7$ je zložené, existujú také $a, b \geq 2$, že $2n + 7 = ab$. Teda

$$a \mid 2n + 7 \mid n! - 1 \Rightarrow a \nmid n! \Rightarrow a \geq n + 1,$$

analogicky $b \geq n + 1$. Dostávame $2n + 7 = ab \geq (n + 1)^2$, po úprave $6 \geq n^2 \Rightarrow 2 \geq n$. Po odskúšaní $n = 1$ a $n = 2$ zistíme, že iba $n = 1$ vyhovuje.

Ak $2n + 7$ nie je zložené, tak zjavne $2n + 7$ je prvočíslo väčšie ako 7:

$$2n + 7 \mid n! - 1 \Rightarrow n! \equiv 1 \pmod{2n + 7}.$$

Využitím tohto poznatku a toho, že $2n + 7 - a \equiv -a \pmod{2n + 7}$, a Wilsonovej vety, ktorá hovorí, že $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$ pre p prvočíslo dostávame

$$\begin{aligned} -1 &\equiv (2n + 6)! = (n + 6)!(2n + 7 - n)(2n + 7 - (n - 1)) \dots (2n + 7 - 1) \equiv \\ &\equiv (n + 6)!(-n)(-(n - 1)) \dots (-1) \equiv (-1)^n (n!)^2 (n + 1)(n + 2) \dots (n + 6) \equiv \\ &\equiv (-1)^n (n + 1)(n + 2) \dots (n + 6) \pmod{2n + 7}. \end{aligned}$$

Po prenásobení číslom $64 = 2^6$ máme

$$\begin{aligned} -64 &\equiv (-1)^n (2n + 2)(2n + 4)(2n + 6)(2n + 8)(2n + 10)(2n + 12) \equiv \\ &\equiv (-1)^n (-5)(-3)(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \\ \Rightarrow 64 &\equiv (-1)^n \cdot 225 \pmod{2n + 7}. \end{aligned}$$

Pre párne n máme $0 \equiv 225 - 64 = 161 \pmod{2n + 7} \Rightarrow 2n + 7 \mid 161 = 23 \cdot 7$ a keďže $2n + 7$ je prvočíslo väčšie ak 7, tak $2n + 7 = 23 \Rightarrow n = 8$. Pre nepárne n analogickým postupom dostaneme $2n + 7 \mid 289 = 17^2 \Rightarrow 2n + 7 = 17 \Rightarrow n = 5$. Po dosadení $n = 5$ a $n = 8$ zistíme, že obe vyhovujú. Zadaniu vyhovujú práve čísla 1, 5, 8. *(Viktor Lukáček)*

Úloha G4. *Označme O stred kružnice opísanej trojuholníka ABC. Feuerbachova kružnica trojuholníka ABC a kružnica opísaná OBC sa pretínajú v dvoch bodoch K a L. Dokážte, že $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle CAK|$.*

Riešenie. Označme si stred strany AB ako E, stred strany AC ako F, pätu výšky z vrchola A na BC ako P, dĺžky strán a obsah trojuholníka ABC ako obvykle.

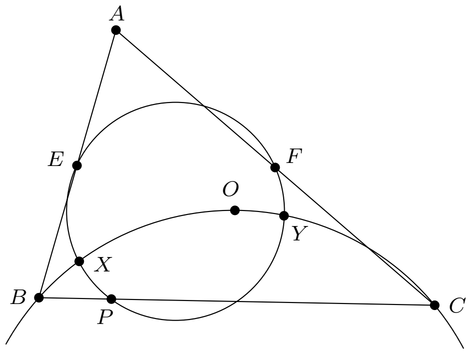
Uvažujme zloženie kružnicovej inverzie so stredom v bode A, polomerom $r = \sqrt{bc/2}$ a osovej súmernosti podľa osi $\sphericalangle BAC$. Obraz bodu B, ozn. B', bude zrejme ležať na polpriamke $\overrightarrow{AC}$, a pre jeho vzdialenosť od A bude platiť:

$$|B'A| = \frac{r^2}{|BA|} = \frac{c}{2}$$

Teda B sa zobrazí na F a preto sa aj F zobrazí na B. Analogicky sa C zobrazí na E a E na C. Ďalej platí, že AP a AO sú isogonálne (symetrické podľa osi uhla, skúste si to dokázať), teda polpriamka AP sa v tomto zobrazení zobrazí na polpriamku AO. Ďalej platí:

$$|AP| \cdot |AO| = |AP| \cdot \frac{abc}{4S} = |AP| \cdot \frac{abc}{2a \cdot |AP|} = \frac{bc}{2},$$

čiže P sa zobrazí na O a O sa zobrazí na P. Ak to dáme dokopy, kružnica opísaná BCO sa zobrazí na Feuerbachovu kružnicu. Teda ich prieniky, X, Y sa zobrazia na X, Y. Ak by sa X zobrazilo na X a Y na Y, tak potom by oba museli ležať na osi $\sphericalangle BAC$, a teda by museli byť identické, a teda rovnosť uhlov zo zadania platí (ak sa nudíte, môžte si skúsiť dokázať, že tento prípad nenastane). Ak sa zobrazí X na Y a naopak, tak je zjavné, že X a Y sú isogonálne, teda rovnosť uhlov zo zadania taktiež platí.



(Filip „Hiphop“ Hanzely)

Úloha A4. *Majme polynóm $P(x)$ s reálnymi koeficientmi splňujúci nasledovnú podmienku: existuje nekonečne veľa dvojíc celých čísel a, b, pre ktoré platí $P(a) + P(b) = 0$. Dokážte, že graf funkcie $y = P(x)$ je symetrický podľa nejakého svojho bodu.*

Riešenie. Zrejme graf nulového polynómu je symetrický podľa nejakého svojho bodu (dokonca každého). A pre iný konštantný polynóm neexistujú celé čísla, že $P(x) + P(y) = 0$. Predpokladajme, že P je stupňa $n > 1$.

Nech teda $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ a $a_n \neq 0$. Je zrejmé, že $P(x) + P(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{P(x)}{a_n} + \frac{P(y)}{a_n} = 0$. A tiež graf $P(x)$ je stredovo súmerný práve vtedy, keď ja graf $\frac{P(x)}{a_n}$ stredovo súmerný. Môžeme teda polynóm P vydeliť a_n, a teda odteraz môžeme predpokladať $a_n = 1$.

Ďalej vieme, že keby bol polynóm párneho stupňa, tak existuje X také, že $\forall x > X$, $|x| > X$ je $P(x) > 0$. Potom však existuje iba konečne veľa celých čísel, v ktorých má P zápornú hodnotu, a ku každému z existuje len konečne veľa y takých, že $P(y) = -P(z)$ (lebo inak by polynóm $P(x) - P(z)$ mal nekonečne veľa koreňov). Preto by bolo len konečne veľa dvojíc celých čísel, že $P(x) + P(y) = 0$, čo je spor. Preto je n nepárne.

Označme si $d = \frac{a_{n-1}}{n}$. Teraz sa pozrieme na polynóm $Q(x) = P(x-d)$ – jeho graf je len posunutý graf P. Stačí nám ukázať, že graf Q je súmerný, ak existuje nekonečne veľa dvojíc čísel x, y, že $Q(x)+Q(y)=0$ a $x+d$ a $y+d$ sú celé.

Vieme, že

$$Q(x) = (x-d)^n + a_{n-1}(x-d)^{n-1} + \cdots + a_0 = x^n - ndx^{n-1} + a_{n-1}x^{n-1} + R(x) = x^n + R(x),$$

kde $R(x)$ je polynóm stupňa najviac $n-2$. Vieme, že existujú také K, L, že Q je na intervaloch $(-\infty, K)$ a (L, ∞) rastúci. Na intervale (K, L) je ohraničený, a preto existujú také M, N ($M < K$, $N > L$), že na intervaloch $(-\infty, M)$, resp. (N, ∞) sú všetky hodnoty Q menšie, resp. väčšie ako ľubovoľná hodnota Q v bode z intervalu (K, L). A zvoľme ich tak, aby $Q(M) < 0$, $Q(N) > 0$. Na intervale (M, N) je len konečne veľa čísel tvaru $z+d$, $z \in \mathbb{Z}$ a z rovnakého dôvodu ako na začiatku je len konečne dvojíc x, y toho tvaru, že $Q(x)+Q(y) = 0$. Preto ich je nekonečne takých, že $x \in (-\infty, M)$ a $y \in (N, \infty)$.

Predpokladajme, že $-x < y$: Najbližšie väčšie číslo tvaru $z+d$, $z \in \mathbb{Z}$ ku $-x$ je jasne $-x + \{2d\}$, kde $\{2d\}$ označuje desatinnú časť. Ak je $d = \frac{z}{2}$ pre nejaké celé z, tak je to $-x+1$. V každom prípade to je $-x+e$, kde e je konštanta. Potom sa pozrieme na polynóm

$$Q(x) + Q(-x+e) = x^n + R(x) + (-x+e)^n + R(-x-e) = nex^{n-1} + S(x),$$

kde $S(x)$ je stupňa najviac $n-2$ (lebo $R(x)$ je stupňa najviac $n-2$). Preto existuje h také, že pre $x < h$ bude hodnota toho polynómu kladná (je párneho stupňa). Teda pre $x < h$ a $y > -x$ (a stále $y > N$) bude platiť $Q(x)+Q(y) \geq Q(x)+Q(-x+e) > 0$, a teda máme spor.

Obdobne ak $-y > x$, rovnako zistíme, že existuje H, že pre $y > H$ a $-y > x$ (a stále $y > N$) bude platiť $Q(x)+Q(y) \geq Q(-y-f)+Q(y) > 0$. No teraz vidno, že je len konečný počet takých dvojíc x, y, že $|x| \neq |y|$. Preto je ich nekonečne takých, že $x = -y$ (pre $x = y$ také nie sú na spomínaných intervaloch). Preto polynóm $Q(x)+Q(-x)$ má nekonečne veľa koreňov a je nulový. Teda Q je nepárny a symetrický podľa bodu $[0,0]$. *(Martin „Vodka“ Vodička)*