Řešení 1. série

Úloha N1. *Existuje nekonečná posloupnost přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots$ taková, že a_i a a_j jsou nesoudělná právě když $|i-j| = 1$?*

Řešení.

Označme $\{r_i\}$ posloupnost všech prvočísel seřazených vzestupně podle velikosti. Potom definujme $\{p_i\}$ a $\{q_i\}$ takové posloupnosti prvočísel, že $p_i = r_{2i}$ a $q_i = r_{2i-1}$ pro $i \in \mathbb{N}$. Tedy prvními několika členy $\{p_i\}$ jsou $3, 7, 13, \ldots$, prvními několika členy $\{q_i\}$ jsou $2, 5, 11, \ldots$.

Ukážeme, že vyhovuje posloupnost $\{a_i\}$ vyjádřená vzorcem[1]

$$a_i = \begin{cases} p_i q_i \cdot \prod_{k=1}^{i-2} p_k & \text{pro } i \text{ sudá} \\ p_i q_i \cdot \prod_{k=1}^{i-2} q_k & \text{pro } i \text{ lichá} \end{cases}$$

Nyní chceme dokázat, že nesoudělné jsou právě ty členy a_i, a_j, pro něž $|i-j| = 1$. Důležité je uvědomit si, že soudělnost (a nesoudělnost) je „vzájemná“, neboli že x je soudělné s y právě tehdy, když y je soudělné s x. To znamená, že stačí pro každé i dokázat, že a_i je soudělné se všemi a_j pro $j \le i-2$ a a_i je nesoudělné s a_{i-1}.

Pokud je i sudé, a $1 \le j \le i-2$, platí, že $p_j \mid a_j$ a zároveň $p_j \mid a_i$, tedy a_i, a_j jsou soudělná.

Jediné l, pro něž platí $p_l \mid a_{i-1}$ je $l = i-1$ ($i-1$ je liché). Ale $p_{i-1} \nmid a_i$ (a_i je dělitelné všemi p_l pro $1 \le l \le i$ kromě $l = i-1$). Tedy žádné p_l nedělí zároveň a_i a a_{i-1}. Obdobně jediné q_l pro něž $q_l \mid a_i$ je q_i, ale největším indexem l takovým, že $q_l \mid a_{i-1}$ je $i-1 < i$, tedy ani žádné q_l nedělí zároveň a_i a a_{i-1}. Protože se v rozkladu a_i a a_{i-1} nacházejí pouze prvočísla p_l a q_l, jsou členy a_i a a_{i-1} nesoudělné.

Pro i liché dokážeme, že posloupnost splňuje požadované vlastnosti, analogicky, a proto je naše $\{a_i\}$ vyhovující posloupnost.

Poznámky opravujícího. Pokud se úloha ptá, zda existuje nějaká posloupnost, která splňuje nějaké podmínky (a opravdu taková existuje), tak by se řešení mělo skládat ze dvou částí: jednak z konstrukce posloupnosti a jednak z důkazu, že posloupnost zadané podmínky opravdu splňuje. Některá řešení obě dvě části spojila do jedné, případně tu druhou odbyla tím, že *je to zřejmé ze zápisu.* Protože úloha byla jednoduchá, tak jsme za to strhávali jeden až dva body podle toho, kolik dalších nejasností se v řešení vyskytlo.

Při řešení úloh s nekonečně velkými množinami (posloupnostmi, ...) je potřeba si dávat pozor, zda je posloupnost, již vytváříte, opravdu nekonečná, anebo jen libovolně dlouhá. Bohužel nám přišlo několik řešení, která posloupnost konstruovala následující indukcí:

1. Vyhovující posloupnost délky 1 existuje: $a_1 = 1$.
2. Mějme vyhovující posloupnost $\{a_i\}_{i=1}^n$ o n členech a nechť $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ je $n-1$ různých prvočísel větších než největší člen a_i. Potom je vyhovující i $(n+1)$-členná posloupnost $p_1 a_1, \ldots, p_{n-1} a_{n-1}, a_n, \prod_{i=1}^{n-1} p_i$.

Tím jsme ovšem pouze dokázali, že existuje libovolně dlouhá vyhovující posloupnost, nikoli však nekonečná. Představme si, jak by vypadal člen a_1 „po nekonečně krocích“: byl by součinem nekonečně mnoha prvočísel, tedy by to nebylo přirozené číslo.

Možná uchopitelnější příklad je následující: Existuje libovolně dlouhá posloupnost za sebou jdoucích složených čísel (je jí posloupnost $n! + 2, n! + 3, \ldots, n! + n$ pro dostatečně velké n), ale zřejmě neexistuje nekonečně dlouhá posloupnost za sebou jdoucích složených čísel (to by znamenalo, že prvočísel je jen konečně mnoho).

(Matěj Konečný & David Hruška)

[1] Symbolu $\prod_{k=1}^{i-2} p_k$ se neděste, je to jen zkrácený zápis pro součin $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_{i-2}$. Prázdný součin definujeme jako 1.

Úloha A1. *Patrik našel kladná reálná čísla $a_1, a_2, ..., a_n$. Ukažte, že může vybrat čísla $x_1, \dots, x_n$ z množiny $\{-1, 1\}$ tak, aby platilo*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_i\right)^2.$$

Řešení. (Podle *Pavla Zaťka*)

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že můžeme předpokládat, že $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$. Ukážeme, že volba $x_i = 1$ pro lichá i a $x_i = -1$ pro sudá i splňuje zadané podmínky. Pro $n = 1$ máme ukázat $a_1^2 \geq a_1^2$, což zjevně platí. Dále nechť $n > 1$.

Předpokládejme nejprve, že n je liché. Nechť s_1 je součet všech $a_i a_j$, kde $i < j$ a kde i a j mají stejnou paritu, a nechť s_2 je součet všech $a_i a_j$, kde $i < j$ a kde i a j mají různou paritu. Chceme ukázat, že platí

$$a_1^2 - a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + \dots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2s_1 - 2s_2,$$

což můžeme upravit na $s_1 \leq s_2 - (a_2^2 + a_4^2 + \dots + a_{n-1}^2)$ a to lze upravit na

$$a_3(a_1 - a_2) + a_5(a_1 - a_2 + a_3 - a_4) + \dots + a_n(a_1 - a_2 + \ldots - a_{n-1}) \leq$$
$$\leq a_2(a_1 - a_2) + a_4(a_1 - a_2 + a_3 - a_4) + \dots + a_{n-1}(a_1 - a_2 + \ldots - a_{n-1}),$$

neboli

$$(a_2-a_3)(a_1-a_2)+(a_4-a_5)((a_1-a_2)+(a_3-a_4))+\dots+(a_{n-1}-a_n)((a_1-a_2)+\dots+(a_{n-2}-a_{n-1})) \geq 0,$$

což je zjevně pravda, protože výraz v každé závorce je nezáporný (protože $a_i \geq a_{i+1}$). Protože jsme postupovali ekvivalentně, dokázali jsme tím, že naše volba x_i skutečně vyhovuje.

Nyní pro sudá n je to ovšem jednoduché. Pro $(n+1)$-tici $a_1, a_2, \dots, a_n, 0$ jsme totiž již ukázali, že tvrzení platí. Ovšem potom $a_1^2 - a_2^2 + \ldots - a_n^2 = a_1^2 - a_2^2 + \ldots - a_n^2 + 0^2 \geq (a_1 - a_2 + \ldots - a_n + 0)^2 = (a_1 - a_2 + \ldots - a_n)^2$, což je přesně to, co jsme chtěli ukázat.

Poznámky opravujícího. Úloha nebyla obtížná, takže krom několika řešení, která řešila špatnou úlohu, byla skoro všechna správně. Po správné volbě x_i (na kterou se dalo přijít zkoumáním malých n) většina řešitelů postupovala indukcí, která též vedla k cíli. Řešení uvedené ve vzoráku jsem vybral proto, že bylo nejjednodušší a že (na rozdíl od jiných) ukazovalo, že podmínka $a_i > 0$ ve skutečnosti není vůbec potřeba. *(Rado Švarc & Štěpán Šimsa)*

Úloha C1. *Čtverec je rozřezán na trojúhelníky tak, že žádné tři vrcholy těchto trojúhelníků neleží na přímce. Pro každý vrchol včetně původních vrcholů čtverce sečteme z něj vycházející úsečky (strany trojúhelníků). Mohou být všechna tato čísla sudá?*

Řešení. Pro spor předpokládejme, že takové rozdělení čtverce na trojúhelníky existuje. Budeme chápat body jako vrcholy a úsečky jako hrany nakreslení nějakého grafu. Ukážeme, že je možné obarvit stěny tohoto grafu (včetně vnější stěny) dvěma barvami tak, aby stejně barevné stěny nesousedily hranou. Nejprve si ale rozmyslíme, jak z toho plyne spor: Barvu vnější stěny (mimo čtverec) nazvěme bílá, tu druhou nazveme černá. Dále označme e počet hran, b počet bílých trojúhelníků a c počet černých trojúhelníků. Každá hrana je hranou právě jednoho černého trojúhelníku a každá hrana kromě čtyř hran čtverce je hranou jednoho bílého trojúhelníku. Proto $e = 3c$, $e - 4 = 3b$. Z toho $3c = 3b + 4$, což je spor, protože levá strana je dělitelná třemi zatímco pravá ne.

Zbývá ukázat, proč toto obarvení stěn existuje. K tomu napřed provedeme několik obecných grafových úvah: Uvažme obecný graf a v každé jeho komponentě si vyberme jeden „startovní“ vrchol. Pak můžeme definovat obarvení **vrcholů** dvěma barvami tak, že se podíváme vždy na sled (navazující posloupnost hran) od startovního vrcholu do vrcholu V a vrcholu V dáme barvu podle toho, zda je tato cesta sudé nebo liché délky. Toto obarvení zřejmě splňuje, že vrcholy spojené hranou mají různou barvu, ale není jasné, jestli je dobře definované – jestli se nemůže stát, že by do nějakého vrcholu V vedl jak sled sudé tak liché délky. V opačném případě máme v grafu sled, který začíná a končí na stejném místě, a má lichou délku (zatím se mohou hrany i vrcholy opakovat).

Ukážeme, že existuje i lichá kružnice (začíná a končí na stejném místě, a vrcholy se jí neopakují). Provedeme procházku po tomto sledu a kdykoli se octneme ve vrcholu V, ve kterém jsme už byli, mohou nastat dvě možnosti: Buď jsme od poslední návštěvy V prošli lichý počet hran – pak máme lichou kružnici, nebo jsme ušli sudý počet hran – pak zapomeneme celou cestu od V do V a pokračujeme s tím, že jsme stále každý vrchol navštívili jen jednou. Přinejmenším na konci získáme lichou kružnici z celé cesty.

Dále předpokládáme, že graf, kterému barvíme vrcholy máme nakreslený v rovině a je souvislý. Ukážeme, že pokud mu nelze obarvit vrcholy dvěma barvami, existuje dokonce jedna stěna s lichým počtem hran. Víme již, že existuje lichá kružnice – uvažme takovou, která má uvnitř sebe co nejmenší počet stěn. Kdyby tato stěna nebyla jen jedna, vedla by z okraje kružnice dovnitř nějaká hrana a následně celá cesta délky k rozdělující kružnici na dvě (pokud přidáme i tuto cestu). Jejich délky označíme a, b – obě musí být z předpokladu minimality sudé. Ale pak délka původní kružnice je $a + b - 2k$, což je taky sudé – spor.

Nyní již máme veškerý aparát na dokázání obarvitelnosti stěn grafu ze zadání dvěma barvami. Sestrojíme duální nakreslení duálního multigrafu – stěny duálního grafu budou vrcholy původního a obráceně. Duální multigraf je zjevně souvislý a každá jeho stěna má sudý počet hran (jen přeložené, že z každého vrcholu původního grafu vychází sudý počet hran) a proto na základě ukázaného pomocného tvrzení lze obarvit vrcholy duálního multigrafu (čili stěny původního grafu) dvěma barvami, aby vrcholy stejné barvy nesousedily.

Poznámky opravujícího. Klíčová část řešení je první odstavec, zbytek jsou víceméně známé technikálie. Podle toho jsem taky odvíjel hodnocení a i za absenci důkazu existence obarvení jsem udělil 5 bodů. Ve vzorovém řešení jsem se snažil tuto technickou část vystavět pokud možno robustně a netrikově, řešitelé si s ní poradili všelijak. Pavel Turek použil taktéž lichou kružnici, ale namísto zužování na jednu stěnu využil princip sudosti v grafu (součet stupňů je sudé číslo). Filip Bialas na druhou stranu trikově vytasil neprotínající se uzavřený Eulerovský tah – z toho pak hned vzešlo obarvení stěn na vnitřek a vnějšek tohoto tahu.

(Mirek Olšák)

Úloha G1. *V nerovnostranném trojúhelníku ABC označme střed kružnice opsané, střed kružnice vepsané a kružnici vepsanou postupně O, I a k. Nechť t je tečna ke k rovnoběžná se stranou BC, která neobsahuje BC. Body D a R ležící na t mají tu vlastnost, že D leží na OI a RI je kolmé na OI. Ukažte, že čtyřúhelník $RADO$ je tětivový.*

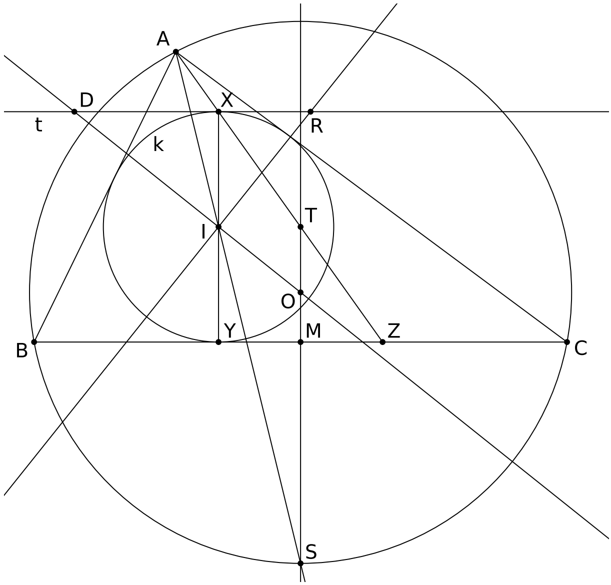
Řešení. Začneme zadefinováním si několika bodů. Nechť M je střed BC, S je A-Švrčkův bod[2], X a Y jsou dotyky k s t a s BC, Z je dotyk kružnice A-připsané se stranou BC a T je průsečík AX s OM.

Nejprve si uvědomme, že z $t \parallel BC$ plyne, že X, I a Y leží na jedné přímce, protože XI je kolmé k t a YI je kolmé k BC, z čehož plyne, že jsou $XI \parallel IY$, takže musí splývat. Dále platí, že O, M i S leží na ose strany BC, takže leží na jedné přímce, která je kolmá k BC a k t a tudíž i rovnoběžná s přímkou, na které leží X, I a Y. Dále, kladná stejnolehlost, která převádí k na kružnici A-připsanou má určitě střed v A a převádí X na Z, takže A, X a Z leží na jedné přímce. Dále je známé, že $BY = \frac{AB+BC-CA}{2} = CZ$, takže z $BM = CM$ dostáváme, že platí

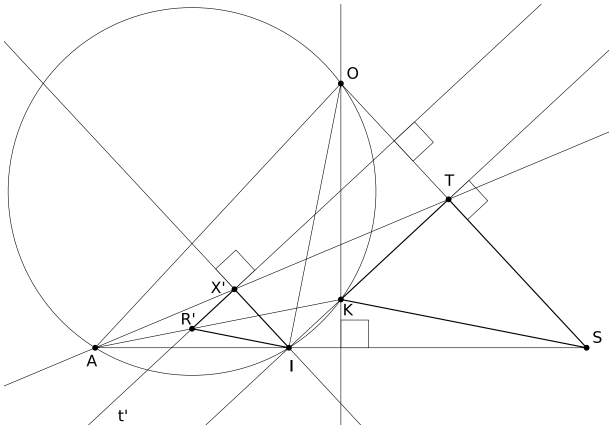
[2]Tak se nazývá ten průsečík osy úhlu u A a kružnice opsané $\triangle ABC$, který je různý od A. Jeho dobrá vlastnost je, že zároveň leží i na ose strany BC.

$YM = ZM$. Pokud toto spojíme s faktem, že $XY \parallel MT$, dostáváme, že MT je střední příčka v $\triangle XYZ$, takže T je střed XZ. Pokud toto spojíme s faktem, že I je střed XY, dostáváme, že $IT \parallel t$.

Nyní, pokud $O \in t$, pak O splývá s D a očividně jsme hotovi. Takže nechť O neleží na t. Ukážeme, že vlastně chceme ukázat $RA = RI$. Platí (používáme orientované úhly, abychom nemuseli rozebírat různé pozice bodů), že $\angle(RD, DO) = \angle(XD, DI) = 90^\circ - \angle(DI, XI) = \angle(ID, IR) + \angle(XI, ID) = \angle(XI, RI) = \angle(AI, RI) + \angle(XI, AI) = \angle(AI, RI) + \angle(OS, AS) = \angle(AI, RI) + \angle(AS, AO) = (\angle(AI, RI) - \angle(AR, AI)) + \angle(RA, AO)$ (využili jsme, že $IX \perp t$, že $OI \perp IR$, že $XI \parallel OS$ a že $OS = OA$ (protože S a A leží na kružnici se středem v O). Protože vlastně chceme ukázat, že $\angle(RA, AO) = \angle(RD, DO)$, přemění se nám toto na důkaz $\angle(RA, AI) = \angle(IA, RI)$, neboli $RI = RA$.



Nechť K je průsečík kružnice opsané $\triangle OAI$ s osou úsečky AS, který je různý od O a nechť R' je takový bod na AK, že $AR' = IR'$. Očividně pokud ukážeme $R = R'$, budeme mít hotovo. Nejprve ukážeme, že $OI \perp IR'$. Inu, protože OK je osa AS, je $OK \perp IS$. Takže platí $\angle(OI, IR') = \angle(OI, IA) + \angle(AI, IR') = \angle(OK, KA) + \angle(KA, AI) = \angle(OK, AI) = 90^\circ$, kde jsme v druhé rovnosti využili obvodové úhly a $AR' = IR'$ a v poslední rovnosti fakt, že $OK \perp AI$. Nyní ještě ukázat, že $R' \in t$, takže nechť t' je kolmice na OS procházející R'. Nejprve ukážeme, že $KI \perp OS$. Platí $\angle(KO, OI) = \angle(KA, AI) = 90^\circ - \angle(KO, KA) = 90^\circ - \angle(KS, KO)$, takže $OI \perp KS$. Navíc $OK \perp SI$, takže I je ortocentrum $\triangle KOS$, takže $KI \perp OS$. Protože ovšem $IT \perp OS$, leží K, I a T na jedné přímce. Nyní nechť X' je pata kolmice z I na t'. Platí $KT \perp OS \perp R'X'$, takže $KT \parallel R'X'$. Dále $\angle(AI, IR') = \angle(AR', AI) = \angle(AK, AS) = \angle(AS, KS)$, takže $IR' \parallel SK$. A protože $R'X' \parallel KT$, $IX' \perp R'X'$ a $ST \perp KT$, je $IX' \parallel ST$. Takže máme $KT \parallel R'X'$, $IR' \parallel SK$ a $IX' \parallel ST$, takže $\triangle IX'R'$ a $\triangle STK$ jsou stejnolehlé. Proto, se KR', SI a TX' musí protínat v jednom bodě. A protože KR' a SI se protínají v A, znamená to, že A, X' a T leží na přímce. Ovšem (protože $RX' \parallel IT$) platí, že $X'I \perp IT$, takže X' je bod na AT takový, že $X'I \perp IT$, neboli $X'I \perp t$. Ovšem tento bod je X! Takže $X' = X$. Protože t' je přímka skrz X rovnoběžná s t, je $t' = t$, takže R' je průsečík t a kolmice z I na OI, což je právě bod R. Tím jsme ukázali, že $R = R'$ a jsme hotovi.



„Pokročilý" způsob, jak ukázat $RI = RA$: Nechť G je obraz R podle I. Protože toto zobrazení převádí t na BC, leží G na BC. Nechť E a F jsou B-Švrčkův bod a C-Švrčkův bod. Z $OI \perp RG$ plyne, že I je střed tětivy určené přímkou RG. Protože BE a CF procházejí I, plyne díky tomu z *Butterfly theorem*[3], že EF protíná RG v takovém bodě R'', že $IR'' = IG$. Ovšem protože $IR = IG$, je $R = R''$, takže R, E a F leží na přímce. Ovšem $\angle EIA = 180° - \angle BIA = \angle IAB + \angle ABI = \angle IAC + \angle CBE = \angle IAC + \angle CAE = \angle IAE$, takže $EA = EI$. Analogicky $FA = FI$, takže EF je osa úsečky AI a protože R na ní leží, platí i $RA = RI$, takže jsme hotovi.

Poznámky opravujícího. Úlohu nikdo nevyřešil. Jednalo se sice o těžkou úlohu, ale jak je vidět ze vzoráku, nepotřebovala žádné triky ani pokročilé techniky, ačkoliv *Butterfly theorem* se mohl hodit. Pro postup bez tohoto kanónu bylo potřeba uvědomit si důležitost bodů T a K. Na významnou úlohu T se dalo přijít zkoumáním případu, kdy $OI \parallel t$. Pokud člověk předpokládal, že tvrzení platí, zkoumáním této konfigurace mohl přijít na to, že K „asi bude nějak důležité".

(Rado Švarc)

[3]Viz např. `http://en.wikipedia.org/wiki/Butterfly_theorem`