Řešení 5. série

Úloha G5. *Je dán trojúhelník ABC a bod D na jeho straně AB. Body K a L leží uvnitř ABC tak, že B, C, K a L leží na kružnici a zároveň $|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle AKD|$ a $|\sphericalangle BCL| = |\sphericalangle ALD|$. Dokažte, že $|AK| = |AL|$.*

Řešení. Označme X průsečík přímky AB a kružnice opsané $BCKL$. Uvažujme úhly orientované modulo $180°$. Potom platí $\angle AKD = \angle KCB = \angle KXB = \angle KXD$. Tudíž AK je tečna ke kružnici opsané DKX. Z mocnosti A k této kružnici platí $|AK|^2 = |AD| \cdot |AX|$. Obdobně dokážeme, že $|AL|^2 = |AD| \cdot |AX|$. Protože délky jsou kladné, platí

$$|AK| = \sqrt{|AD| \cdot |AX|} = |AL|,$$

přesně jak jsme chtěli.

Poznámky opravujícího. Alternativní řešení využívá průsečíků AK a AL s kružnicí opsanou $BCKL$ a stejnolehlosti se středem v A zobrazující D na B. *(Magdaléna Mišnová)*

Úloha A5. *Najděte všechny polynomy $P(x)$ s reálnými koeficienty takové, že pro libovolná reálná čísla a, b, c splňující $a + b + c = 0$ leží body $[a, P(a)]$, $[b, P(b)]$ a $[c, P(c)]$ na jedné přímce.*

Řešení.

Body $[a, P(a)]$, $[b, P(b)]$ a $[c, P(c)]$ leží na přímce, právě když

$$\frac{P(a) - P(b)}{a - b} = \frac{P(b) - P(c)}{b - c}.$$

Všimněme si, že pokud tuto podmínku splňují polynomy $P_1(x)$ a $P_2(x)$, pak ji splňuje i polynom $\alpha P_1(x) + \beta P_2(x)$ pro všechna reálná čísla α, β. Zřejmě ji splňují polynomy $P(x) = 1$ a $P(x) = x$, s využitím $a + b + c = 0$ můžeme ověřit, že i $P(x) = x^3$, protože následující je ekvivalentní:

$$\begin{aligned} \frac{a^3 - b^3}{a - b} &= \frac{b^3 - c^3}{b - c}, \\ a^2 + ab + b^2 &= b^2 + bc + c^2, \\ a(a + b) &= c(b + c), \\ -ac &= -ca, \end{aligned}$$

což platí. Vyhovují tedy všechny polynomy tvaru $P(x) = Ax^3 + Bx + C$ pro reálná čísla A, B, C.

Pokud podmínku splňuje $P(x)$, splňuje ji i $P(x) - P(0)$. Konstantní člen $P(x) - P(0)$ je 0, takže můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat $P(0) = 0$

Nejprve dokažme, že $P(x)$ má nulový koeficient x^2 uvažováním parity. Podmínka platí pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$, takže můžeme dosadit $a = x$, $b = 0$, $c = -x$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{P(x) - P(0)}{x - 0} &= \frac{P(0) - P(-x)}{0 - (-x)}, \\ P(x) &= -P(x). \end{aligned}$$

Každý vyhovující polynom s nulovým absolutním členem je tedy lichou funkcí. $P(x)$ je lichou funkcí právě když má všechny koeficienty u sudých mocnin x nulové, takže speciálně koeficient x^2 je nulový, je tedy nulový i ve vyhovujících polynomech s nenulovým absolutním členem.

Dále omezme stupeň polynomu dosazením $a = 2x$, $b = x$ a $c = -3x$, opět pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{P(2x) - P(x)}{2x - x} &= \frac{P(x) - P(-3x)}{x - (-3x)}, \\ \frac{P(2x) - P(x)}{x} &= \frac{P(x) + P(3x)}{4x} \\ 4P(2x) - 4P(x) &= P(x) + P(3x), \\ 4P(2x) - 5P(x) &= P(3x) \end{aligned}$$

Stupeň polynomu $P(x)$ označme n a koeficient x^n v $P(x)$ označme r. Výrazy $4P(2x) - 5P(x)$ i $P(3x)$ jsou polynomy v x, takže aby se rovnaly, musí se rovnat i koeficienty členů s x^n. Platí tedy

$$\begin{aligned} 4r \cdot 2^n - 5r &= r \cdot 3^n, \\ 4 - \frac{5}{2^n} &= \left(\frac{3}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Pokud $n \geq 4$,

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} > 4 > 4 - \frac{5}{2^n}$$

.

Stupeň polynomu $P(x)$ s nulovým absolutním členem je nejvýše 3, takže stupeň všech vyhovujících $P(x)$ je také nejvýše 3. Vyhovují tedy právě ty polynomy, které lze zapsat jako tvaru $P(x) = Ax^3 + Bx + C$ pro reálná čísla A, B, C.

Poznámky opravujícího. Úloha (zejména omezení stupně) měla mnoho způsobů řešení: vhodnou volbu a, b, c podobně jako v uvedeném řešení nebo variací na $x+1, -x, -1$, přímé uvažováním polynomů ve dvou proměnných, derivováním $P(x)$ nebo například počítání průsečíků s přímkami $y = k$. Velká většina řešitelů nějakou z těchto cest dříve či později dospěla ke správnému řešení. *(Tomáš Flídr)*

Úloha C5. *Michal a Vašek spolu jeli na výlet a při nástupu do kilometr dlouhého vlaku*[1] *si zavolali:*

- *Michal: „Ahoj Vašku, zrovna jsem nastoupil do vlaku.“*
- *Vašek: „No, já taky, a kde jsi?“*
- *Michal: „No, tady, a kde jsi ty? Spíš vepředu, nebo vzadu?“*
- *Vašek: „To já si nepamatuju, a ty?“*
- *Michal: „No, já vlastně taky ne. . . “*
- *Vašek: „Jak se teď najdeme?“*

Michal a Vašek u sebe každý mají iKS-hodinky, které ukazují, kolik metrů každý z nich ušel, a s jejichž pomocí si spolu mohou po celou dobu svého pobytu ve vlaku volat. Oba ví, kterým směrem je předek vlaku, ale mají mizerný zrak, sluch a vlastně všechny smysly, takže pouze dovedou poznat, když vrazí jeden do druhého nebo do konce vlaku. Nalezněte nejmenší reálné číslo x takové, že se dovedou najít a ujít při tom v součtu nejvýše x metrů, nezávisle na tom, kde do vlaku nastoupili.

[1] Vlak je jednorozměrný, můžeme si ho představit jako kilometr dlouhou úsečku.

Řešení.

Ukážeme, že $x = 1500$.

Najskôr ukážeme, ako majú Michal a Vašek postupovať, aby dokopy prešli najviac 1500 metrov. Najskôr Michal prejde najviac 500 metrov dopredu. Ak počas toho narazí na Vaška, dosiahol svoj cieľ. Ak narazí na predný koniec vlaku, otočí sa a pôjde opačným smerom. Na Vaška narazí najneskôr po 1000 metroch (dĺžka vlaku), takže dokopy prejde najviac 1500 metrov, Vašek sa nehýbe.

Ak Michal prejde 500 metrov a nič sa nestane, tak sa teraz nachádza niekde v prvej polovici vlaku (v prvých 500 metroch). Vašek sa teraz začne hýbať smerom dopredu. Ak sa na začiatku nachádzal za Michalom, po najviac 1000 metroch na Michala narazí a celková prejdená vzdialenosť je tak najviac 1500 metrov.

Ak sa Vašek nachádzal pred Michalom, Michal naňho nenarazil, a tak sa nachádza stále pred ním. To znamená, že po najviac 500 metroch narazí na predný koniec vlaku. V takom prípade sa otočí a po najviac 500 metroch musí stretnúť Michala, ktorý sa nachádza niekde v prvej polovici vlaku. Teda dokopy prešli znovu najviac 1500 metrov.

Teraz ukážeme, že prejdenie menej ako 1500 metrov im nevie zaručiť, že sa stretnú. Predstavme si, že sme nepriateľ Michala a Vaška, ktorý im počas toho, ako sa hýbu po vlaku, hovorí, kedy a do čoho narazili. Samozrejme, musí to hovoriť tak, aby existovali nejaké ich počiatočné pozície, ktoré sú s jeho informáciami konzistentné. Ak by naozaj začínali Michal a Vašek na týchto pozíciách, situácia by vyzerala úplne rovnako.

Nech $\varepsilon > 0$ je malé reálne číslo. Kým úseky (časti vlaku), ktoré Michal a Vašek prešli, dokopy nemajú viac ako $1000 - 3\varepsilon$ metrov, budeme im hovoriť, že do ničoho a nikoho nenarazili. Keď túto hranicu prekonajú, označíme x veľkosť úseku, v ktorom sa pohyboval Michal, m jeho aktuálnu relatívnu pozíciu voči začiatku tohto úseku, y veľkosť úseku, v ktorom sa pohyboval Vašek a v jeho aktuálnu relatívnu pozíciu voči začiatku úseku. Platí $x + y = 1000 - 3\varepsilon$.

Ak teraz $x - m + v \geq 500 - \frac{3}{2}\varepsilon$ ($x - m + v$ je dĺžka Michalovho úseku napravo od neho plus dĺžka Vaškovho naľavo od neho), tak nepriateľ umiestni úseky do vlaku tak, že najskôr bude ε metrov, po ktorých nikto neprešiel, potom bude Michalov úsek dlhý x, ďalej ε voľných metrov, Vaškov úsek dlhý y a voľný úsek dlhý ε. Momentálne sa chlapci od seba nachádzajú $x - m + v + \varepsilon \geq 500 - \frac{\varepsilon}{2}$ metrov, takže aspoň takúto vzdialenosť musia ešte prejsť, aby sa stretli.

Ak $y - v + m \geq 500 - \frac{3}{2}\varepsilon$ ($y - v + x$ je dĺžka Vaškovho úseku napravo od neho plus dĺžka Michalovho naľavo od neho), tak nepriateľ umiestni úseky rovnako s tým rozdielom, že najprv umiestni Vaškov (y) a až potom Michalov (x). Chlapci sú od seba ešte vzdialení $y - v + m + \varepsilon \geq 500 - \frac{\varepsilon}{2}$ metrov.

Takto rozmiestnené úseky sú disjunktné a nedotýkajú sa žiadneho konca vlaku, takže odpovede nepriateľa o tom, že Michal s Vaškom do ničoho nenarazili, sú konzistentné.

Jedno z čísel $x - m + v$, $y - v + m$ musí byť aspoň $500 - \frac{3}{2}\varepsilon$, pretože ich súčet je dĺžka Michalovho plus dĺžka Vaškovho úseku (dokopy sme pre každý úsek sčítali dĺžku časti naľavo a napravo od Michala, resp. Vaška): $x + y = 1000 - 3\varepsilon$.

Nepriateľ vie teda navoliť ich pozície tak, aby prešli aspoň $1000 - 3\varepsilon + 500 - \frac{\varepsilon}{2} = 1500 - \frac{7}{2}\varepsilon$ metrov, čo vie byť ľubovoľne blízko 1500 pre dostatočne malú hodnotu ε.

Poznámky opravujícího. Väčšina riešení správne ukázala, ako sa vedia Michal s Vaškom stretnúť tak, aby prešli najviac 1500 metrov. Druhá časť (že toľko naozaj treba prejsť) už bola náročnejšia. Niektoré riešenia postupovali podobne ako je popísané vyššie, objavili sa aj geometrické riešenia, ktoré si polohu Michala a Vaška reprezentovali ako bod v štvorci so stranou dlhou 1 a ich stratégiu (pohyb) ako krivku v štvorci. Niekoľko riešení sa snažilo rozoberať prípady podľa toho, ktorý z chlapcov sa hýbe ktorým smerom a dokedy, tie však zväčša neboli korektné, pretože nedokázali zaručiť, že pokryjú všetky možné stratégie. *(Michal Staník)*

Úloha N5. *Je dána $(2n^2 - 3n + 2)$-prvková množina M přirozených čísel. Dokažte, že můžeme zvolit n-prvkovou podmnožinu $A \subseteq M$ takovou, že platí: kdykoliv dostaneme přirozené k splňující $2 \le k \le n$ a libovolná $x_1, \ldots, x_k \in A$ (ne nutně různá), pak $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \notin A$.*

Řešení. (podle Michala Janíka)

Množinu vyhovující podmínce pro A ze zadání nazveme *bezsoučtovou.* Jako první krok si všimneme, že pro libovolné k je množina $\{k, k+1, \ldots, 2k-1\}$ bezsoučtová, neboť nejmenší součet, kterého můžeme dosáhnout, je $2k$. Také když libovolnou bezsoučtovou množinu vynásobíme nějakým nenulovým číslem, dostaneme opět bezsoučtovou množinu. A nakonec, pokud je množina bezsoučtová modulo nějaké prvočíslo, je jistě bezsoučtová i bez modula.

Základní myšlenka důkůazu je najít nějaké vhodné velké prvočíslo p, vybrat díky pozorováním výše mezi zbytky po dělení p několik bezsoučtových množin a z Dirichletova principu ukázat, že alespoň v jedné této množině je n prvků M.

Podle Dirichletovy věty existuje nekonečně mnoho prvočísel tvaru $(2n-1)k - (n-1)$, neboť $2n-1$ a $n-1$ jsou nesoudělná čísla. Můžeme proto vybrat p v tomto tvaru, aby bylo větší než všechny prvky M a aby k bylo alespoň n.

Ukážeme, že množina $\{k, k+1, \ldots, 2k-1\}$ je bezsoučtová i modulo p. Označme tuto množinu K. Jediný problém by mohl být, kdyby některý součet byl větší než p a modulením by se z něj stal některý z prvků K. Stačí tedy ukázat, že všechny součty jsou menší než $p+k$. Největší součet, který můžeme získat, je

$$n(2k-1) = 2nk - n < 2nk - n + 1 = p + k.$$

Nyní budeme násobit K všemi nenulovými zbytky po dělení p. Tím dostaneme $p-1$ bezsoučtových množin. *Násobkem* množiny K budeme označovat množinu $\{ik, i(k+1), \ldots, i(2k-1)\}$ pro nějaké i. Je známo, že vynásobíme-li všechny nenulové zbytky modulo p jedním z nich, dostaneme opět všechny nenulové zbytky modulo p. Podívejme se na to, co se děje s jedním fixním prvkem K. Ten bude při násobení K procházet všechny možné zbytky po dělení p, bude tedy procházet i prvky M. Sečteme-li tedy počet prvků M v násobku množiny K pro všechny tyto násobky, dostaneme $|M| \cdot k$. Násobků K je $p-1$. Zároveň platí

$$\frac{|M| \cdot k}{p-1} = \frac{(2n-1)(n-1)k}{(2n-1)k - n} > \frac{(2n-1)(n-1)k}{(2n-1)k} = n - 1.$$

Tudíž z Dirichletova principu se musí být v některém násobku K alespoň n prvků M, přesně jak jsme chtěli. Tyto prvky budou tvořit množinu A.

Poznámky opravujícího. Úloha byla dosti obtížná a triková, což se projevilo na počtu správných řešení. *(Magdaléna Mišinová)*